

ಸುಬೋಧ



೧೫-೬-೫೫

ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ

ಲೇಖಕರು

ಪಾಂ. ಶ್ರೀ. ಕಟ್ಟಿ, ಎಮ್. ಎ. (ಕೆಂಬೆಲ್),

ಮಾಜೀ ಸೀನಿಯರ್ ಸ್ಟಾಲರ್, ಟ್ರಿನಿಟಿ ಕಾಲೇಜ್, ಕೇಂಬ್ರಿಜ್,
ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಎಲ್‌ಫಿನ್‌ಸ್ಟನ್ ಕಾಲೇಜ್, ಮುಂಬಯಿ,
ಮತ್ತು ಮಾಜೀ ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕೆಂಡರಿ ಟ್ರೀನಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬೆಳಗಾವಿ,

ಮತ್ತು

ವಾ. ಪಾಂ. ಖಾನೋಲಕರ, ಎಮ್. ಎ. (ಲಂಡನ್),

ಶಿಕ್ಷಣಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕೆಂಡರಿ ಟ್ರೀನಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬೆಳಗಾವಿ
ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಇಂಡಿಯನ್ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್
ಎಜ್ಯುಕೇಶನ್, ಮುಂಬಯಿ.



ಓರಿಎಂಟೆ

ಮುಂಬಯಿ

ಲಾಂಗಮನ್

ಕಲಕತ್ತಾ

ಲಿಮಿಟೆಡ್

ಮದ್ರಾಸ

ORIENT LONGMANS LTD.
17 CHITTARANJAN AVENUE, CALCUTTA 13
NICOL ROAD, BALLARD ESTATE, BOMBAY 1
36-A MOUNT ROAD, MADRAS 2
17 NAZIMUDDIN ROAD, DACCA

LONGMANS, GREEN AND CO. LTD.
6 & 7 CLIFFORD STREET, LONDON W.1
531 LITTLE COLLINS STREET, MELBOURNE C.1
BOSTON HOUSE, STRAND STREET, CAPE TOWN

LONGMANS, GREEN AND CO. INC.
55 FIFTH AVENUE, NEW YORK 3

LONGMANS, GREEN AND CO.
215 VICTORIA STREET, TORONTO 1

C4280 L

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಎಲ್ಲಾ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಕಾಯ್ದಿಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರಕಾಶಕರ ಅನುಮತಿಯನ್ನು ಬರಹದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯದೆ ಇದರ ಯಾವದೇ ಭಾಗವನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಉದ್ಧೃತ ಮಾಡಬಾರದು. ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ ಪ್ರಕಾಶಕರಿಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.

First Published May 1953

Price Rs. 2.

PRINTED IN INDIA

by M. R. Sirur at the Sirur Printing Press, Khetwadi 12th Lane, Girgaum, Bombay 4 and published by N. B. Cooper, Manager, Orient Longmans Ltd., Nicol Road, Ballard Estate, Bombay 1.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತದ ಈ ಎರಡನೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಇಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲು ನಮಗೆ ಬಹಳ ಆನಂದವಾಗುತ್ತಿದೆ. ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮಕ್ಕೆನುಸರಿಸಿ ಇದನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದ್ದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅದರಲ್ಲಿಯ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಅತಿ ಸುಲಭವಾಗುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಭೂತವಾದ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ವಿವೇಚಿಸಲಾಗಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಷಯದ ಮೇಲಿನ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿಯೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಬುದ್ಧಿಯನ್ನು ಒರೆಗೆ ಹಚ್ಚಿ ನೋಡುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಬಹಳಷ್ಟು ಸಂಗ್ರಹಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ವಿಶೇಷ ಆಯಾಸವಿಲ್ಲದೆ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವಂಥವು ಇವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಹಾಗೆಯೇ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಅಗ್ರಹದ ಸೂಚನೆಯು ಇದೆ.

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣ ಈ ವಿಷಯವು ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ತೋರಿಕೆಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಗಡುಚೆನಿಸುವದು. ಪ್ರಸ್ತುತ ಭಾಗದ ಎರಡು ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭರೀತಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ವಿವೇಚಿಸಲಾಗಿದ್ದು ಅತಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ ಕೂಡ ಆ ವಿಷಯವು ಸಹಜವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಘಾತಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಎಷ್ಟೋ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸುಮ್ಮನುಮ್ಮನೆ ಗೊಂದಲ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆಂದು ಅನುಭವವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಇಡೀ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ಅದೇ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ವಹಿಸಿ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳ ಸವಿಸ್ತಾರ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಅಂಥ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳುವದು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವಾದ ಸಂಗತಿಯಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಿಷಯದ ಅಂಗ ಉಪಾಂಗಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಂಥ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕದ ಎಲ್ಲ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೌದ್ಧಿಕ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವಂಥ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆಯೆಂದು ಮೇಲ್ಮೇಲೆ ನೋಡಿದರೂ ತಿಳಿದುಬರುವದು. ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯು ಎಷ್ಟು ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅಜಮಾಸು

ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕು, ತಿಳಿಯದೇ ಇದ್ದ ಭಾಗಗಳು ಯಾವವು ಎಂದು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರಬೇಕು ಮತ್ತು ವಿಷಯದ ಪುನರಾವಲೋಕನೆಯೂ ಆಗಬೇಕು, ಎಂಬ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದಂತೆಯೇ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಹನ್ನೆರಡು ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ ಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕು ಎಂದು ಅಗ್ರಹದ ಸೂಚನೆಯು ಇದೆ.

ಆಧುನಿಕ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯ ತತ್ವಗಳ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗವು ಮಾನವರ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ತರಹದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವಿಪುಲವಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘವಾದ ಪರಿಶ್ರಮದಿಂದ ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆದ ಮತ್ತು ಅನುಭವದ ಒರೆಗಳಿಗೆ ಹಚ್ಚಿ ನೋಡಿದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಅತಿ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಪರಿಭಾಷೆಯೆಂದರೆಯೇ ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳು. ಪದಾರ್ಥವಿಜ್ಞಾನಶಾಸ್ತ್ರ, ಯಂತ್ರಶಾಸ್ತ್ರ, ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರ, ಸ್ಥಾಪತ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ, ನೌಕಾನಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ವೈಮಾನಿಕಶಾಸ್ತ್ರ, ಮೊದಲಾದ ಆಧುನಿಕ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಗತಿಹೊಂದಿದ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ವಿವಿಧ ಕಲೆಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶಿಲ್ಪಿಗೂ ಕೂಡ ಸೌಕರ್ಯದಿಂದ ಸಹಜವಾಗಿ ಮತ್ತು ತಪ್ಪದಂತೆ ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವುದು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಷ್ಟು ಮಾಡಲು ಬರುವಷ್ಟಾದರು ಬೀಜಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸವು ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವವರಿಗಾಗಬೇಕು. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಹಿರಿಯರು ಹೇಳಿದ್ದೇ ಪ್ರಮಾಣವು ಎಂದಾಗಲೀ ಇಲ್ಲವೆ ಶ್ರೇಷ್ಠರು ಹಾಗೆ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿದೆಯೆಂದಾಗಲೀ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಾಣವೆಂದು ಮನ್ನಿಸದೆ ಇಲ್ಲವೆ ಅದೊಂದು ತೊಕತಾಳೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು ಅವರು ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳದೆ ಅವುಗಳ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸತ್ಯತೆಯು ಅವರಿಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗುವುದು ಅತ್ಯವಶ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆದರವೆನಿಸಬೇಕು, ಮತ್ತು ಆ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಅವರ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರೀತಿಯು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಬೇಕು. ಈ ಮುಖ್ಯ ಹೇತುವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊಸ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡುವ ಅನೇಕ ಪ್ರಕಾರಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವರಿಗೆ ಮನಗಾಣಿಸಿ ಕೊಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಪುಸ್ತಕದ ವಿಸ್ತಾರವು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೆಳೆದಿದ್ದರೂ ಅತ್ತ ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡದೆ ಕೇವಲ ವಿಷಯ ವಿನೇಚನೆಯನ್ನು ಸುಬೋಧವಾಗಿ ಮಾಡು-

ವದರ ಕಡೆಗೇ ಎಲ್ಲ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನು ಪೂರೈಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಉದ್ದೇಶವೆಂದರೆ ಅಂಕ-
ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಬುದ್ಧಿಯು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ನಡೆಯುವದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಪ್ಪು ತಿಳುವಳಿಕೆ-
ಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಕೂಡ ಬೀಜಗಣಿತ ಈ ವಿಷಯವು ಅತಿ
ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಮನೋರಂಜಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅವರಿಗೆ ಎನಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಅವರ
ದೃಢವಾದ ಮತವು ಆಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅವರು ಸಂತೋಷದಿಂದ ಆ ವಿಷಯದ
ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರವೃತ್ತರಾಗಿ ಅವರಿಗೆ ಆ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಮ್ಮ
ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಬರಬೇಕು, ಅವರ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸವು ಜಾಗೃತವಾಗ-
ಬೇಕು. ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ಜನರಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಕಠಿಣವಾದ
ಶಾಸ್ತ್ರವಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಯ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಅದರ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು
ಕಠಿಣವಾಗುತ್ತದೆಂಬ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ಅಷ್ಟೊಂದು ನಿಜವಲ್ಲ, ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾಥಮಿಕ
ಭಾಗವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಗೂ ಗಮ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಅವರ ಮನವರಿಕೆಯಾಗ-
ಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ರೂಢ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬಾರದಂತಹ
ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬೈಜಿಕ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಆಯಾಸವಿಲ್ಲದೇ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವುದು ಎಂಬುದು
ಅವರಿಗೆ ಸಪಜವಾಗಿ ಕಂಡುಬರಬೇಕು, ಮತ್ತು ಆ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಅರಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು
ಅವರು ಸಿದ್ಧರಾಗಬೇಕೆಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಎಲ್ಲ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡ-
ಲಾಗಿದೆ.

ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ದೋಷವಿಲ್ಲದಂತೆ ಮಾಡಲು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.
ಅದರ ಹಾಗೆ ಎಚ್ಚರಿಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ತಪ್ಪುಗಳು ಉಳಿದು ಬಿಟ್ಟಿರುವವು.
ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಬಂಧುಭಗಿನಿಯರಿಗೂ ತಪ್ಪುಗಳೂ ಕೊರತೆಗಳೂ ಇನ್ನೂ
ಕಂಡುಬಂದರೆ ಅವರು ತಿಳಿಸಬೇಕು ಎಂದು ವಿನಂತಿ ಇದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಪುಸ್ತಕದ
ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ
ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವಾಗಬೇಕು ಎಂಬ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಕೆಲವು ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು
ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಆಭಾರಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಮತ್ತು ಕೃತಜ್ಞತೆಯಿಂದ ಸ್ವೀಕರಿಸ-
ಲಾಗುವುದು, ಮತ್ತು ಪ್ರಕಾಶನದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ವ್ಯವಹಾರ್ಯವಿದ್ದವುಗಳನ್ನು
ಮುಂದಿನ ಸಂಸ್ಕರಣದ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪತ್ರ-
ವ್ಯವಹಾರವನ್ನು ವಾ. ಪಾಂ. ಖಾನೋಲಕರ ಇವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಾಶಕರ
ವಿಳಾಸಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು.

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಪ್ರಕರಣ	ಪುಟ
೧. ಸಾಧಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು	೧
೨. ಸಮಮಾನಿಕ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಯಾಮಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು	೨೧
೩. ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಬದಲಿಸುವುದು	೫೫
೪. ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳು (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದ್ದು)	೬೪
೫. ಹಿಂದಿನ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಜನೆ	೭೭
೬. ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣ	೯೦
೭. ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣ (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು)	೧೩೩
೮. ಮಹತ್ತರವು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ	೧೬೫
೯. ಲಘುತ್ವವು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವು	೧೭೨
೧೦. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ	೧೮೨
೧೧. ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು) (ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ) ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಗಳು (೧-೧೨) ಮಹತ್ತರದ ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳು ಉತ್ತರಗಳು	೨೦೯ ೨೨೩ ೨೩೫ ೨೩೬

ಕೆಲವು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು.

ಅವಯವ, ಗುಣ, ಗುಣಕ = Factor

ಉತ್ಥಾಪನ ರೀತಿ = Method of
Substitution.

ಏಕವರ್ಣ ದ್ವಿಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳು
= Quadratic Equations

ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರ, ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸ =
Cross Multiplication

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ = Factorisation

ತುಲನೆ ರೀತಿ = Method of Com-
parison

ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿ = Trinomial
Expression of second degree.

ನಿಶ್ಚಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಿತ್ಯ-
ಸಮಗಳು = Identities

ಮಹತ್ತರ
ಸಾಧಾರಣ
ವಿಭಾಜಕ,
ಮ. ಸಾ. ವಿ.,
ದೃಢಭಾಜಕ } = Highest
common
Factor,
H. C. F.

ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿ = Method
of addition and
subtraction.

ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಷ್ಟೇವ = Lowest
Common Denominator.

ಲಘುತ್ತಮ | = Lowest
ಸಾಧಾರಣ Common Multi-
ವಿಭಾಜಕ ple, L. C. M.
ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಲೋಪ ಮಾಡುವದು = Elimi-
nation.

ವಿಸ್ತಾರಗಳು = Expansions (of
the formula)

ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ = Reciprocal

ಸಮಮಾನಿಕ (ಸಮ-
ಯಾಮಿಕ) ಸಮೀ-
ಕರಣಗಳು, ದ್ವಿವರ್ಣ
ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕ-
ರಣಗಳು } = Simul-
taneous
Equa-
tions.

ಸಾದಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು = Simple
Equations.

ಸೂತ್ರಗಳು = Formulas.

ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸಾದಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೧.೧. ಹೊಸ ವರ್ಷದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿ ಒಮ್ಮೆ ನಾವು ಸಮೀಕರಣ-
ಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು, ಇವುಗಳ ಕಡೆಗೆ ಹೊರ-
ಳೋಣ. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಅವು-
ಗಳ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ
ಅಂಕಿಯು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಿಂತ ೫ ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಮತ್ತು ಆ
ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಎಂಟು ಪಟ್ಟು ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು
ಯಾವುದು?

ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಿಯು ಯ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ-
ಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಿಯು ಯ+೫ ಇರುವುದು, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು
೧೦(ಯ+೫)+ಯ ಇರುವುದು, ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಯ+೫+ಯ
ಇರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} 10(\text{ಯ}+೫)+\text{ಯ} &= ೮(\text{ಯ}+೫+\text{ಯ}) \\ \therefore 10\text{ಯ}+೫0+\text{ಯ} &= ೮(೨\text{ಯ}+೫) \\ \therefore 10\text{ಯ}+೫0 &= ೧೬\text{ಯ}+೪0 \\ \text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } ೫0-೪0 &= ೧೬\text{ಯ}-10\text{ಯ} \\ \therefore 10 &= ೫\text{ಯ} \\ \therefore \text{ಯ} &= ೨. \end{aligned}$$

\therefore ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ೭, ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ೨.

\therefore ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೭೨.

[ತಾಳಿ: ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು = ೭ + ೨ = ೯; ೯ × ೮ = ೭೨.]

ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಿಯು ಬೆಲೆಯು ಆ ಅಂಕಿಯು ಯಾವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ
ಇರುವದೋ ಆ ಸ್ಥಾನದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಉದಾ-
ಹರಣೆಗಾಗಿ ೩, ೫, ಮತ್ತು ೮ ಈ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಆದ ೩೫೮, ೮೫೩, ೫೮೩ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ-
ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ೩ ಈ ಅಂಕಿಯು ಒಂದನೆಯದರಲ್ಲಿ ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ,
ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ
ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩೦೦, ೩೦, ಮತ್ತು ೩
ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಸಂಗತಿಯು ೩ ರದೋ ಅದೇ ೫ ರದು ಮತ್ತು ೮ ರದು.

ಯಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ, ರ ಮತ್ತು ಲ ಈ ಅಂಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು $100\text{ಯ} + 10\text{ರ} + \text{ಲ}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿಯಂತೆ ಯರಲ ಎಂದು ಬರೆಯುವದಿಲ್ಲ. ಯರಲ ಅಂದರೆ $\text{ಯ} \times \text{ರ} \times \text{ಲ}$. ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾಲೇಖನದಲ್ಲಿಯ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹಿಂದೆ ಭಾಗ ೧, ಪು. ೭, ೮ ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದೆ. ಆ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪುನಃ ಹಿರಿದಿ.

ಉ. ೨. ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಿಂತ ೨ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಬೇರಿರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡೂವರೆ ಪಟ್ಟಿನೊಳಗಿಂದ ೪೨ ಕಳೆದರೆ ಯಾವುದು ಶೇಷ ಉಳಿಯುವದೋ ಅದರಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು ತಿರುವುಮುರುವು ಆದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ ಶತಂ ಮತ್ತು ಎಕಂ ಸ್ಥಾನಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಯ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು $\text{ಯ}+೨$ ಇರುವುದು, ಮತ್ತು ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು $\text{ಯ}+\text{ಯ}+೨$, ಅಂದರೆ $೨\text{ಯ}+೨$ ಇರುವುದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು, $100\text{ಯ} + 10(\text{ಯ} + ೨) + ೨\text{ಯ} + ೨$ ಇದ್ದು ತಿರುವುಮುರುವು ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು $100(೨\text{ಯ} + ೨) + 10(\text{ಯ} + ೨) + \text{ಯ}$ ಇರುವುದು.

$$\therefore ೨೨ \{ 100\text{ಯ} + 10(\text{ಯ} + ೨) + ೨\text{ಯ} + ೨ \} - ೪೨ = 100(೨\text{ಯ} + ೨) + 10(\text{ಯ} + ೨) + \text{ಯ}$$

$$\therefore ೨೨(100\text{ಯ} + 10\text{ಯ} + ೨೦ + ೨\text{ಯ} + ೨) - ೪೨ = ೨೦೦\text{ಯ} + ೨೦೦ + 10\text{ಯ} + ೨೦ + \text{ಯ}$$

$$\therefore ೨೨(೧೧೨\text{ಯ} + ೨೨) - ೪೨ = ೨೧೧\text{ಯ} + ೨೨೦$$

$$\therefore ೨೮೦\text{ಯ} + ೪೮೪ - ೪೨ = ೨೧೧\text{ಯ} + ೨೨೦$$

$$\therefore ೨೮೦\text{ಯ} + ೧೩೨ = ೨೧೧\text{ಯ} + ೨೨೦$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } ೨೮೦\text{ಯ} - ೨೧೧\text{ಯ} = ೨೨೦ - ೧೩೨$$

$$\therefore ೬೯\text{ಯ} = ೨೦೭$$

$$\therefore \text{ಯ} = ೩.$$

∴ ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ೩, ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ್ದು ೫, ಮತ್ತು ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದ್ದು ೮, ಆದುದರಿಂದ ೩೫೮ ಇದು ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು.

[ತಾಳೆ: ೩೫೮ × ೨೨ = ೮೮೫೬ - ೪೨ = ೮೮೧೪.]

ಉ. ೩. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ೧೨ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರಿನಂತೆ ೪೦ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರು ದರದ ಕೆಲವು ಹಾಲನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅದನ್ನು ೧೪ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಆ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ನೂರಕ್ಕೆ ೨೪ ರಂತೆ ಲಾಭವಾದರೆ ಅವನು ಕಡಿಮೆ ತರಗತಿಯ ಎಷ್ಟು ಹಾಲನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಕಡಿಮೆ ದರದ ಪ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಮಿಶ್ರಣವು ೪೦+ಪ ಸೇರುಗಳಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ೧೪ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರು ಈ ದರದಂತೆ ೧೪(೪೦+ಪ) ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಮಾರಲಾಗುವದು. ಮೊದಲಿನ ೪೦ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ೧೨ ಆಣೆಗೆ ಸೇರು ಈ ದರದಂತೆ ೪೨೦ ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಿದೆ. ಮತ್ತು ಪ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ೧೦ ಆಣೆಗೆ ಸೇರು ಈ ದರದಂತೆ ೧೦ಪ ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಿದೆ, ಅಂದರೆ ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು (೪೨೦+೧೦ಪ) ಆಣೆಗಳು ಆಯಿತು. ಮತ್ತು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೪ ಲಾಭವಾಗಿದ್ದರಿಂದ ಅದನ್ನು $\frac{100}{124}$ (೪೨೦+೧೦ಪ) ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಮಾರಿರಬೇಕು.

ಆದುದರಿಂದ, ೧೪(೪೦+ಪ) = $\frac{100}{124}$ (೪೨೦+೧೦ಪ)

$$\therefore ೧೪(೪೦+ಪ) = \frac{100}{124} (೪೨೦+ಪ)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೭(೪೦+ಪ) = $\frac{50}{62}$ (೪೨೦+ಪ)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೩೫(೪೦+ಪ) = ೩೦ (೪೨೦+ಪ)

$$\therefore ೧೪೦೦ + ೩೫ಪ = ೧೨೬೦೦ + ೩೦ಪ$$

ಪಕ್ಕಾಂತರದಿಂದ, ೩೫ಪ - ೩೦ಪ = ೧೨೬೦೦ - ೧೪೦೦

$$\therefore ೫ಪ = ೮೮೦$$

$$\therefore ಪ = ೧೭೬.$$

೧೭೬ ಸೇರುಗಳು ಇದು ಉತ್ತರ.

[ತಾಳೆ: ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = (೪೦×೧೨ + ೧೭೬×೧೦) ಆ. = (೪೮೦ + ೧೭೬೦) ಆ.

= ೨೨೪೦ ಆ. ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು = (೨೨೪೦×೧೪) ಆ. = ೩೧೧೬೦ ಆ. $\frac{೨೦೦×೧೨೪}{೧೦೦} = ೨೪೮.$]

ಉ. ೪. ಒಬ್ಬ ಬೆಣ್ಣೆ ಮಾರುವವನು ೨:೩ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅದನ್ನು ೩॥ ರೂ. ರತ್ತಲು ಈ ದರದಿಂದ ಮಾರುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಗಿಂತ ಎರಡನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ೮ ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ೪ ರೂ. ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ ಎರಡನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು (೪+೨) ರೂ. ಇರುವದು.

ಮಿಶ್ರಣದ ಸಲುವಾಗಿ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೨ ರತ್ತಲು ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಎರಡನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ತಲುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಈಗ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೨ ರತ್ತಲುಗಳ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ೨ ೪ ರೂ. ಇದ್ದು ಎರಡನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ತಲುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೩(೪+೨) ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು ೫ ರತ್ತಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು { ೨೪+೩(೪+೨) } ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಲಾಭವು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯು ೫ { ೨೪+೩(೪+೨) } ರೂ. ಇರುವದು. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯು ರತ್ತಲಿಗೆ ೩॥ ರೂ. ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ, ಅಂದರೆ ೫ ರತ್ತಲುಗಳ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ೧೭॥ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ,

$$೫ \{ ೨೪+೩(೪+೨) \} = ೧೭೨$$

$$\therefore ೨೪+೩(೪+೨) = \frac{೧೭೨}{೫}$$

$$\therefore ೨೪+೩೪+೬ = ೧೪$$

$$\therefore ೫೪ = ೧೨೨$$

$$\therefore ೪ = ೨೨.$$

೨೨ ರೂ.; ೩ ರೂ. ಉತ್ತರ.

[ತಾಳೆ: ಮೊದಲನೆಯ ೨ ರತ್ತಲುಗಳ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು, ೫ ರೂ.; ಎರಡನೆಯ ೩ ರತ್ತಲುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೯ ರೂ. \therefore ೫ ರತ್ತಲುಗಳ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ೧೪ ರೂ. ೫ ರತ್ತಲುಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು, ೧೭೨ ರೂ. $೧೪ \times \frac{೧೨೨}{೧೦೦} = ೧೭೨$.]

ಉ. ೫. ಮನೆಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವ ಮತ್ತು ಮಾರುವ ವ್ಯವಹಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನಿಗೆ ದರವು ಇಳಿದಾಗ್ಗೆ ಹಣದ ಅಡಚಣೆಯು

ಮೂಲಕ ಒಂದು ಮನೆಯನ್ನು ಹಾನಿಪಟ್ಟು ೧೮೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಮಾರಬೇಕಾಯಿತು. ಕೆಲವು ದಿನಗಳ ಹಿಂದೆ ಮನೆಗಳಿಗೆ ಬೇಡಿಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವಾಗ ಅದು ೨೯೦೦ ರೂ.ಗೆ ಮಾರಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಈಗ ಆದ ಹಾನಿಯ ನಾಲ್ಕನೇ ಪಟ್ಟು ಲಾಭವು ಆಗ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಆ ಮನೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ಯ ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ಆದ ಹಾನಿಯು = (ಯ - ೧೮೦೦) ರೂ. ಮೊದಲು ಮಾರಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ಆಗುವ ಲಾಭವು = (೨೯೦೦ - ಯ) ರೂ.

$$\therefore \text{ಆದಿ (ಯ - ೧೮೦೦)} = ೨೯೦೦ - \text{ಯ}$$

$$\therefore \text{ಆದಿ ಯ - ೧೮೦೦} = ೨೯೦೦ - \text{ಯ}$$

$$\text{ಸಮೀಕರದಿಂದ, ಆದಿ ಯ + ಯ = ೨೯೦೦ + ೧೮೦೦}$$

$$\therefore \text{ಆದಿ ಯ} = ೧೧೦೦$$

$$\therefore \text{ಯ} = ೨೦೦೦$$

೨೦೦೦ ರೂ. ಉತ್ತರ.

[ತಾಳೆ: ಹಾನಿಯು (೨೦೦೦ - ೧೮೦೦) ರೂ. = ೨೦೦ ರೂ.; ಲಾಭವು = (೨೯೦೦ - ೨೦೦೦) ರೂ. = ೯೦೦ ರೂ. ೨೦೦೦ × ಆದಿ = ೯೦೦೦.]

ಉ. ೬. ಆನಂದರಾಯರ ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆನಂದರಾಯರು ತಮ್ಮ ಆದಾಯದ ಆರನೆಯ ಪಾಲನ್ನು ನಿಯಮದಿಂದ ಉಳಿಸುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರ ಖರ್ಚು ಆನಂದರಾಯರ ಖರ್ಚಿಗಿಂತ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ವಸಂತರಾಯರಿಗೆ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ೬೦೦ ರೂ. ಸಾಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವೆಷ್ಟು?

ಮಾಸಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವು ವ ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ಆನಂದರಾಯರ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು ೫ ವ ರೂ. ಇರುವದು ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರದು (೫ವ + ೧೦೦) ರೂ. ಇರುವದು. ಉತ್ಪನ್ನವು ವ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ವಸಂತರಾಯರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ (೫ವ + ೧೦೦ - ವ) ರೂ. ಸಾಲವಾಗುತ್ತಿರಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ,

$$೧೨(೫ವ + ೧೦೦ - ವ) = ೬೦೦$$

$$\therefore ೧೨(೧೦೦ - ೫ವ) = ೬೦೦$$

$$\therefore ೧೦೦ - ೫ವ = ೫೦$$

$$\therefore ೫ವ = ೫೦$$

$$\therefore \text{ವ} = ೧೦$$

೩೦೦ ರೂ. ಉತ್ತರ.

[ತಾಳಿ: ಅನಂದರಾಯರು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೫೦ ರೂ. ಉಳಿಸುತ್ತಾರೆ, ಅಂದರೆ ಅವರ ಖರ್ಚು ೨೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ವಸಂತರಾಯರದು ೩೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅವರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೫೦ ರೂ. ಸಾಲವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಸಾಲದ ರಕಮು ೬೦೦ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ.]

ಉ. ೨. ಒಬ್ಬ ರೈತನು ಒಬ್ಬ ಜಮೀನುದಾರನ ತೆಂಗಿನ ತೋಟವನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ಕೆಲವು ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಕರಾರಿನಿಂದ ಹಿಡಿದನು. ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಯ ದರವು ನೂರಕ್ಕೆ ೫ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ಜಮೀನುದಾರನಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ಪ್ರತಿ ಗಿಡದಿಂದ ೪ ರೂ. ಉತ್ಪನ್ನವು ದೊರೆಯುತ್ತಿತ್ತು. ಮತ್ತು ಈಗ ದರವು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ರೂ. ಆಗಿದ್ದರಿಂದ ೧೨ ರೂ. ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಕರಾರವಾಗಿದೆ?

ಕರಾರಿನೊಳಗಿನ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ನೆ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ರೂ. ದರ ಇದ್ದಾಗ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆಯು $\frac{n}{20}$ ರೂ. ಆಗುವದು. ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು $(400 + \frac{n}{20})$ ರೂ. ಆಗುವದು. ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಿಡವು ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ೪ ರೂ. ಇತ್ತು. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{400 + \frac{n}{20}}{4}$ ಗಿಡಗಳು ಇದ್ದಿರಬೇಕು.

೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ರೂ. ದರದಿಂದ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆಯು $\frac{n}{8}$ ರೂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು $(400 + \frac{n}{8})$ ರೂ. ಇರುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಿಡದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ೧೨ ರೂ. ದೊರೆಯುವದರಿಂದ $\frac{400 + \frac{n}{8}}{12}$ ಗಿಡಗಳಿದ್ದಿರಬೇಕೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{400 + \frac{n}{8}}{12} = \frac{400 + \frac{n}{20}}{4}$$

$$\therefore \frac{400 + \frac{n}{8}}{12} = \frac{400 + \frac{n}{20}}{4}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೪೦೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೫(೧೬೦೦+೫) = ೩(೮೦೦೦+೫)$

$$\therefore ೮೦೦೦ + ೫೫ = ೨೪೦೦೦ + ೧೫$$

ಪಕ್ಕಾಂತರದಿಂದ,

$$೫೫ - ೧೫ = ೨೪೦೦೦ - ೮೦೦೦$$

$$\therefore ೪೦ = ೧೬೦೦೦$$

$$\therefore ೫ = ೪೦೦$$

೮೦೦೦ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳು.

[ತಾಳೆ: ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ರೂ. ಈ ದರದಿಂದ ೮೦೦೦ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆಯು ೪೦೦ ರೂ. \therefore ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೮೦೦ ರೂ. \therefore ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $೮೦೦ \div ೪ = ೨೦೦$. ೮೦೦೦ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ರೂ. ದರದಿಂದ ಬೆಲೆಯು ೨೦೦೦ ರೂ. \therefore ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು = ೨೪೦೦ ರೂ., \therefore ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು = $\frac{೨೪೦೦}{೧೨} = ೨೦೦$.]

ಉ. ಲ. ಒಬ್ಬ ವರ್ತಕನು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ಈ ಎರಡು ದರಗಳಿಂದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೨ ರೂ. ಗೆ ರತ್ನಲಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೬ಕ್ಕೆ ಲಾಭವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತರದ ಚಹವನ್ನು ಅವನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆ?

ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೧ ರತ್ನಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ಅವನು ಎರಡನೆಯ ತರದ ೨ ರತ್ನಲು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಈಗ

ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಚಹದ ೧ ರತ್ನಲಿನ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = ೨ ರೂ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ತರದ ೨ ರತ್ನಲು ಚಹದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = ೪ ರೂ.

\therefore (೧+೨) ರತ್ನಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = (೨+೪) ರೂ. ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಮಾರಿದರೆ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೬ಕ್ಕೆ ಲಾಭವಾಗುತ್ತದೆ, ಆದುದರಿಂದ (೧+೨) ರತ್ನಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯು

$$= \frac{೧೬}{೧೦೦} (೨+೪) ರೂ.$$

$$= \frac{೬}{೨೫} (೨+೪) ರೂ.$$

ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೨ ರೂ. ಗೆ ರತ್ನಲಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಈ ದರದಿಂದ (೧+೨) ರತ್ನಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಬೆಲೆಯು ೨ (೧+೨) ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{೬}{೨೫} (೨+೪) = ೨ (೧+೨)$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೭ (೨ + ೨೫ಪ) = ೧೫ (೧ + ಪ)$

$$\therefore ೧೪ + ೧೫೫ಪ = ೧೫ + ೧೫ಪ$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧೫೫ಪ - ೧೫ಪ = ೧೫ - ೧೪$

$$೫ಪ = ೧$$

$$ಪ = \frac{೧}{೫}$$

ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೧ ರತ್ನಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ತರದ ೫ ರತ್ನಲು ಇಲ್ಲವೆ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ನಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ತರದ ೪ ರತ್ನಲು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆ. **೩ : ೪ ಉತ್ತರ.**

[ತಾಳೆ: ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ನಲು ಚಹದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = ೬ ರೂ.; ಎರಡನೆಯ ತರದ ೪ ರತ್ನಲು ಚಹದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = ೯ ರೂ.; ಒಟ್ಟು ೭ ರತ್ನಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = $(೬ + ೯)$ ರೂ. = ೧೫ ರೂ. ೨|| ರೂ. ದರದಂತೆ ೭ ರತ್ನಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು = ೧೭|| ರೂ. ಲಾಭವು = $(೧೭|| - ೧೫)$ ರೂ. = ೨|| ರೂ. ೧೦೦ ಕ್ಕೆ

$$\text{ಆಗುವ ಲಾಭವು } \frac{೨|| \times ೧೦೦}{೧೫} = \frac{೫೦}{೩} = ೧೬\frac{೨}{೩}.]$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧.

೧. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಒಂದು ಕುದುರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಂಡಿಯನ್ನು ೨೦೦೦ ರೂ. ಗೆ ಕೊಂಡನು. ಕುದುರೆಯನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೫ ಲಾಭವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಬಂಡಿಯನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭವನ್ನೂ ಪಡೆದು ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೨೬೦ ರೂ. ಲಾಭವಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. ಎರಡು ಆಯತಾಕೃತಿ ಹೊಲಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅಗಲಳತೆಯ ಒಂದೂವರೆ ಪಟ್ಟು ಇದ್ದು ಎರಡನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೪೦ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಅದರ ಅಗಲಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಅಗಲಳತೆಗಿಂತ ೧೦ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಎರಡನೆಯ ಹೊಲವು ಮೊದಲನೆಯದರಿಗಿಂತ ೨೬೦೦ ಚೌ. ವಾ. ದೊಡ್ಡದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಉಗಿಬಂಡಿಯು ೨೦ ಮಿನಿಟು ಮೊದಲೇ ಹೊರಟ ಮತ್ತೊಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯನ್ನು ಒಂದು

ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ಹಾಕುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎರಡನೆಯ ಉಗಿಬಂಡಿಯ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು?

೪. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೩|| ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಮತ್ತು ೩||| ದರದಿಂದ ಕೆಲವು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೬೦೦೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಬಡ್ಡಿಗೆ ಹಚ್ಚಿದನು. ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ೫೯೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೫. ಎರಡೂವರೆ ರೂ. ಗೆ ರತ್ನಲು ಇರುವಂಥ ೨೬ ರತ್ನಲು ಚಹದಲ್ಲಿದ್ದ ಮೂರುವರೆ ರೂ. ಗೆ ರತ್ನಲು ಇರುವಂಥ ಎಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ರತ್ನಲಿಗೆ ೩ ರೂ. ೭ ಆಣೆ ದರದಂತೆ ಮಾರಿದರೆ ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೦ ಲಾಭವಾಗುವದು?

೬. ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ಕ್ರಮದಿಂದ ೧ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತವೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿಂದ ೯ ಕಳೆದು ಉಳಿದ ಶೇಷಕ್ಕೆ ೩೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನಷ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೭. ಶರದ್ ಮತ್ತು ವಿಜಯ ಇವರಿಬ್ಬರ ಹತ್ತರ ಒಟ್ಟು ೬೪ ಗಜಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಶರದನು ತನ್ನಲ್ಲಿಯ ಗಜಗಳಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಜಗಳನ್ನು ವಿಜಯನಿಗೆ ಕೊಟ್ಟರೆ ವಿಜಯನ ಹತ್ತರ ಶರದನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿರುವ ಗಜಗಳ ಮೂರು ಸಟ್ಟು ಗಜಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಗಜಗಳಿದ್ದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ವಸಂತರಾಯರು ಮತ್ತು ಅನಂತರಾಯರು ಇವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಸಂತೆಗೆ ಹೋಗುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ೧೧೨ ರೂ. ಇದ್ದವು. ಕೊಂಡು-ಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ ವಸಂತರಾಯರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ೩ ಹಣವನ್ನೂ, ಮತ್ತು ಅನಂತರಾಯರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣದ ೩ ಭಾಗವನ್ನೂ, ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದರು. ಕೊನೆಗೆ ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿಯೂ ಅಷ್ಟೇ ಹಣ ಉಳಿಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಸಂತೆಗೆ ಹೋಗುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು?

೯. ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅಗಲಳತೆಗಿಂತ ೬ ಇಂ. ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ೨ ಇಂ. ಕಡೆಮೆ ಮಾಡಿದರೆ

ಮತ್ತು ಅಗಲತೆಯನ್ನು ೧೨ ಇಂ. ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅಷ್ಟೇ ಉಳಿಯುವದು. ಆದರೆ ಅದರ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೦. ಎರಡು ನಿಲ್ದಾಣಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೊರಟ ಎರಡು ಬಂಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಹೊರಟ ಬಂಡಿಯು ಮುಂದಿನ ಬಂಡಿಯನ್ನು ೨೪ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ಹಾಕುತ್ತದೆ. ಆ ಎರಡೂ ಬಂಡಿಗಳು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೊರಟಿದ್ದರೆ, ಹೊರಟ ತರುವಾಯ ೪ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಎರಡೂ ಬಂಡಿಗಳ ತಾಸಿನ ವೇಗಗಳಲ್ಲಿ ೧೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರವಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಾಸಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಮೈಲು ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೧. ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಿಂತ ೨ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಿಂತ ೨ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೨೦ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೬ ಶೇಷವು ಉಳಿಯುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೧೨. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಚಹದ ಕೆಲವು ರತ್ತಲಿನ ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಪೇಟೆಗೆ ಹೋದನು. ಅಲ್ಲಿ ೨ ರೂ. ೬ ಆ. ಒಂದು ರತ್ತಲು ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ೯ ಆ. ಒಂದು ರತ್ತಲು, ಹೀಗೆ ಎರಡು ತರದ ಚಹಗಳು ಇದ್ದದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಚಹವನ್ನು ಕೊಂಡರೆ ತನ್ನಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ಹಣದಲ್ಲಿ ೬ ರೂ. ಉಳಿಯುತ್ತವೆಂದು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ತರದ ಅಷ್ಟೇ ಚಹವನ್ನು ಕೊಂಡರೆ ೩ ರೂ. ೨ ಆ. ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುತ್ತವೆಂದು ಅವನಿಗೆ ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಆದರೆ ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ತನ್ನ ಊರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗುವ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನ ಮುಕ್ಕಾಮಿನ ಊರಿಗೆ ೨ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ತನ್ನ ನಡೆಯುವ ವೇಗವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲಿನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅವನು ಕಾಲು ತಾಸು ಮೊದಲು ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೧೪. ಒಂದು ರತ್ತಲು ಚಹವು ಮತ್ತು ಒಂದು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳಿಗೆ ೩ ರೂ. ಬೆಲೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಚಹದ ದರವು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೫ ರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೮ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾದ ಮೂಲಕ ೩ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೫ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೧ ರೂ. ೧೫ ಆ. ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮೊದಲು ಇದ್ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ದರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೫. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವನು ಲೋಕದಿಂದ ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬಿ-ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ೨ ರೂ. ಡಬ್ಬನ್ನಿನಂತೆ ಮಾರಿ ೯ ರೂ. ೬ ಆ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆದನು. ಎರಡನೆಯ ಬಾರಿ ಅದೇ ದರದಿಂದ ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಆದರೆ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಧೆ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಡಬ್ಬನ್ನಿಗೆ ೧೫ ರೂ. ಈ ದರದಂತೆ ಮಾರಬೇಕಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ೯ ರೂ. ೬ ಆ. ಹಾನಿಯಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

೧೬. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಊರಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿ ಖಾತೆಗಳನ್ನು ಇಡುತ್ತಾನೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ೪೦೦ ರೂ. ತೆಗೆದು ಎರಡನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ, ಎರಡನೆಯದರೊಳಗಿನ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದರೊಳಗಿನ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ರಕಮು ಜಮೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ವಿರುದ್ಧ, ಎರಡನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ೨೦೦ ರೂ. ತೆಗೆದು ಮೊದಲನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಎರಡೂ ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿಟ್ಟ ರಕಮುಗಳು ಸರಿ ಆಗುವವು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವು ಜಮೆಯಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೭. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲು ವೇಗದಂತೆ ಕೆಲವು ಅಂತರವನ್ನಾ, ಮತ್ತು ೩ ರ್ತಿ ಮೈಲು ವೇಗದಂತೆ ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನಾ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೪ ಮೈಲು ಅಂತರವನ್ನು ನಡೆದನು. ಅವನು ನಾಲ್ಕು ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋದ ಅಂತರವನ್ನು ೩ ರ್ತಿ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ, ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ೪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿದ್ದರೆ, ಅವನಿಗೆ ೧೫ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಅವನು ೪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವನ್ನು ನಡೆದನು?

೧೮. ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಮೂರೂ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೨ ಇದ್ದು, ನಡುವಿನ ಅಂಕಿಯ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿಂದ ೯೯ ಕಳೆದು ಉಳಿದ ಶೇಷದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೧೯. ಇಬ್ಬರು ಗೃಹಸ್ಥರ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಒಬ್ಬನು ತನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಸಿಲುಕು ಇಡುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯವನ ಖರ್ಚು ಮೊದಲನೆಯವನ ಖರ್ಚಿಗಿಂತ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೧೫೦೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದದ್ದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ೪ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ೨೦೦೦ ರೂ. ಸಾಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೦. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನ ಹತ್ತರ ಇದ್ದ ೫೦೦೦೦ ರೂ. ರಕಮಿನಲ್ಲಿ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಮತ್ತು ೩% ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನೂ ಇಡುತ್ತಾನೆ. ಈ ಠೇವುಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯು ೧೮೭೦ ರೂ. ಗಳಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ರಕಮನ್ನು ಇಟ್ಟಿರುತ್ತಾನೆ ?

೨೧. ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗೆ ಎಕ್ಕುಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ೮ ಇದ್ದು, ನಡುವಿನ ಅಂಕಿಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨೧೬ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ ಬರುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಎಕ್ಕುಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಿಯು ಎಕ್ಕುಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೨. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವನು ಕೆಲವು ಮೋಸಂಭಿಗಳನ್ನು ೧|| ರೂ. ಗೆ ಡರುನ್ನಿನಂತೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಆರು ಪಟ್ಟು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧||| ರೂ. ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ಗೆ ಡರುನ್ನಿನಂತೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ೩ ಆಣೆಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೫ ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಅವನು ಯಾವ ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎಷ್ಟು ಮೋಸಂಭಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು ?

೨೩. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವಳು ರೂ. ೧೦ ರಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ ಮತ್ತು ೯ ರಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೯೬ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಳು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ೨ ಆಣೆಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಮಾರಿದಳು. ಈ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವಳಿಗೆ ೨ ರೂ. ಲಾಭವಾಗಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಎಷ್ಟು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಅವಳು ಕೊಂಡಿದ್ದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೪. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ಕಡಿಮೆ ದರದ ೨೮ ಪೌಂಡು ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ಪೌಂಡಿಗೆ ೫ ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚು ದರವಿರುವ ೧೨ ಪೌಂಡು ಚಹವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ ಅದನ್ನು ಪೌಂಡಿಗೆ ೨|| ರೂ. ದರದಿಂದ ಮಾರಲಾಗಿ ೧೩|| ರೂ. ಲಾಭ ಪಡೆದನು. ಆದರೆ ಕಡಿಮೆ ದರದ ಚಹದ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತು ?

೨೫. ಒಂದು ರೂ. ೧ ಸೇರಿನಂತೆ ಕೊಂಡ ೨೨ ಸೇರು ಹಾಲಿನಲ್ಲಿ ೯ ಆಣೆಗೆ ಸೇರಿನಂತೆ ಕೊಂಡ ಎಷ್ಟು ಹಾಲು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ, ಮಿಶ್ರಣವು ೧೪ ಆಣೆಗೆ ಸೇರಿನಂತೆ ಮಾರಿ, ನೂರಕ್ಕೆ ೨೫ ಲಾಭವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ?

೨೬. ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಿಂತ ೩ ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದು, ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಏಳು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೩ ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೭. ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಿಂತ ೪ ರಿಂದ ಸಣ್ಣದಿದ್ದು, ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕ್ಷೇ ಇರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೮. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತನ್ನ ಊರಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ಬಂದನು. ಹೋಗುವಾಗ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೧೨ ಮೈಲುಗಳು ಮತ್ತು ತಿರುಗಿ ಬರುವಾಗ ವೇಗವು ೯ ಮೈಲುಗಳು ಇದ್ದರೆ, ಅವನಿಗೆ ಈ ಪ್ರವಾಸದಲ್ಲಿ ೫ ಮಿನಿಟುಗಳು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೯. ಒಬ್ಬ ಶ್ರೀಮಂತ ಗೃಹಸ್ಥನು ತಿರುಗಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಹೊರಗೆ ಹೋದಾಗ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಅವನು ಭಿಕ್ಷುಕರ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ತಂಡನ್ನು ಕಂಡನು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಭಿಕ್ಷುಕನಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಆಣೆ ಕೊಡಬೇಕೆಂದು ಅವನು ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿ ಅವನಿಗೆ ತನ್ನ ಹತ್ತರ ಆ ಹೊತ್ತಿನಲ್ಲಿ ೩ ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಮೂರು ಆಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟನು ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ತನ್ನ ಹತ್ತರ ಮೂರುಕಾಲು ರೂಪಾಯಿ ಸಿಲುಕು ಇದ್ದದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಗೊತ್ತಾಯಿತು. ಆದರೆ ಒಟ್ಟು ಭಿಕ್ಷುಕರು ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಇದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೦. ಎರಡು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೫ ನೆಯ ಅಂಶವು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೮ ನೆಯ ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೩೧. ಒಬ್ಬ ಮೋಟಾರ ಡ್ರಾಯವರನು ತನ್ನ ೧೨೦ ಮೈಲಿನ ಪುನಾಸವನ್ನು ಮೊದಲು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮೋಟಾರನ್ನು ನಡಿಸಿ ೩ ತಾಸು ೩೫ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಅಂತರವನ್ನು ಮೋಟಾರ ನಡಿಸಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೨. ಇಬ್ಬರು ಸಹೋದರರ ವಯಸ್ಸುಗಳಲ್ಲಿ ೪ ವರ್ಷಗಳ ಅಂತರವು ಇದ್ದು, ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇಂದು ಅವರ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸಿದೆ. ಆರು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಹೊತ್ತಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೧೩ ಪಟ್ಟು ಇರುವದು. ಆದರೆ ಈಗಿನ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೩. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಹೋದ ವರ್ಷ ಹುಡುಗಿಯರಿಗಿಂತ ಹುಡುಗರು ೧೦೦ ಮಂದಿ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರು. ಈ ವರ್ಷ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೦ ರಿಂದ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಳೆಯಿತು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಹುಡುಗಿಯರಿಗಿಂತ ಹುಡುಗರು ೧೫೯ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಈಗ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳಿದ್ದಾರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೪. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ೬ ರೂ. ಗೆ ಚೌರಸ ವಾರಿನಂತೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ೮೦೦ ಚೌ. ವಾರ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಸ್ವಂತಕ್ಕಾಗಿ ಮನೆ ಕಟ್ಟಲು ಕಾಯ್ದಿಟ್ಟು, ಉಳಿದ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ದಿವಸಗಳ ತರುವಾಯ ಹೆಚ್ಚು ದರ ಬಂದದ್ದರಿಂದ ೧೫ ರೂ. ಗೆ ಚೌ. ವಾರಿನಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಸ್ವಂತಕ್ಕಾಗಿ ಜಾಗೆಯು ಪುಕ್ಕಟೆಯಾಗಿ ಸಿಕ್ಕು, ಮೇಲಾಗಿ ೧೫೦೦ ರೂ. ಅವನು ಲಾಭ ಪಡೆದನು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಜಾಗೆಯನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೫. ಅಣ್ಣನ ವಯಸ್ಸು ಈಗ ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೧೫ ಪಟ್ಟು ಇದೆ. ಆದರೆ ೪೯ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ಮೂರು ಪಟ್ಟಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅದು ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಇತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೬. ನೆಲದ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ತುಂಡು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಕಟ್ಟುವ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ತರದ ಮನೆ, ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಕೂಡಿ, ಹೋದ ವರ್ಷ ೩೦೦೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಈಗ ನೆಲದ ಬೆಲೆಯು ನೂರಕ್ಕೆ ೫೦ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದು, ಮನೆ ಕಟ್ಟುವ ಖರ್ಚು ನೂರಕ್ಕೆ ೨೫ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ೩೯೦೦೦ ರೂ. ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನೆಲದ ಈಗಿನ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ?

೧.೨. ಉ. ೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ: ೪.೫. (ಯ - ೫) - ೧.೨ಯ = ೮ + ೨೫ಯ.

ಇದರಲ್ಲಿಯ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ವ್ಯವಹಾರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸುವದು ಒಂದು ರೂಢ ಮಾರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ,

$$೪೨ (ಯ - ೨) - ೧೫ಯ = ೫ + ೨೫ಯ$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೮೦ (ಯ - ೨) - ೨೫ಯ = ೧೬ + ೫ಯ$$

$$\therefore ೮೦ಯ - ೪೫ - ೨೫ಯ = ೧೬ + ೫ಯ$$

$$\therefore ೫೫ಯ - ೪೫ = ೧೬ + ೫ಯ$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ,

$$೫೫ಯ - ೫ಯ = ೧೬ + ೪೫$$

$$\therefore ೫೦ಯ = ೬೧$$

$$\therefore ಯ = ೧.$$

ಅದರೆ ಹೀಗೆ ಮಾಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆಯೇ? ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ-
ಗಳ ಸಮ್ಮುಗುರುತು ವ್ಯವಹಾರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಷ್ಟೇ ದೃಢವಾಗಿದ್ದರೆ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಾವು
ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

$$\begin{aligned} & \text{೪.೫ (ಯ - .೫) - ೧.೨ಯ} = .೮ + .೨೫ಯ \\ \therefore & \text{೪.೫ಯ - ೨.೨೫ - ೧.೨ಯ} = .೮ + .೨೫ಯ \end{aligned}$$

$$\therefore \text{೩.೩ಯ - ೨.೨೫} = .೮ + .೨೫ಯ$$

$$\text{ಸಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } \text{೩.೩ಯ - .೨೫ಯ} = .೮ + ೨.೨೫$$

$$\therefore \text{೩.೦೫ಯ} = ೩.೦೫$$

$$\therefore \text{ಯ} = ೧.$$

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಗಿಂತ ಈ ರೀತಿಯು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದುದು ಮತ್ತು ಸುಲಭ-
ವಾದದ್ದು ಎಂದು ಅನಿಸುವದಿಲ್ಲವೇ? ಕೇವಲ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ-
ಗಳೆಂದು ಸುಮ್ಮನೆ ಅಂಜಬಾರದು.

$$\text{ಇಲ್ಲವೆ } \text{೪.೫ (ಯ - .೫) - ೧.೨ಯ} = .೮ + .೨೫ಯ$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$\text{೪೫ (೧೦ಯ - ೫) - ೧೨೦ಯ} = ೮೦ + ೨೫ಯ *$$

$$\therefore \text{೪೫೦ಯ - ೨೨೫ - ೧೨೦ಯ} = ೮೦ + ೨೫ಯ$$

$$\text{ಸಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } \text{೪೫೦ಯ - ೧೨೦ಯ - ೨೫ಯ} = ೮೦ + ೨೨೫$$

$$\therefore \text{೩೦೫ಯ} = ೩೦೫$$

$$\therefore \text{ಯ} = ೧.$$

* ಇಲ್ಲಿ ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ದಶಾಂಶ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದೆ
ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಎ. ಬ.} &= ೪.೫ (೧-೫) - ೧.೨ = ೪.೫ \times ೦.೫ - ೧.೨ = ೨.೨೫ - ೧.೨ \\ &= ೧.೦೫ \quad \text{ಬ. ಬ.} = .೮ + .೨೫ = ೧.೦೫ \end{aligned}$$

$$\text{ಉ. ೨. } \text{೧.೨ರ} - \frac{\text{.೧೮ರ} - \text{.೦೨೫}}{\text{.೫}} = .೪ರ + ೪.೪೫ \text{ ಈ ಸಮೀಕರ-}$$

ಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ವ್ಯವಹಾರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$$\text{೧೫ರ} - \frac{\text{೧೮ರ} - \text{೨ರ}}{೫} = ೪ರ + ೪೫$$

$$\therefore \text{೧೫ರ} - ೫ರ + ೨ರ = ೪ರ + ೪೫$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೧೨೦ರ - ೩೬ರ + ೫ = ೪೦ರ + ೪೪೫$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧೨೦ರ - ೩೬ರ - ೪೦ರ = ೪೪೫ - ೫$

$$\therefore ೪೪ರ = ೪೪೦$$

$$\therefore ರ = ೧೦.$$

ಇಲ್ಲವೆ, $೧.೨ರ - \frac{.೧೨ರ - .೦೨೫}{.೫} = .೪ರ + ೪.೪೫$

$$\therefore ೧.೨ರ - .೩೬ರ + .೦೫ = .೪ರ + ೪.೪೫$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧.೨ರ - .೩೬ರ - .೪ರ = ೪.೪೫ - .೦೫$

$$\therefore .೪೪ರ = ೪.೪$$

$$\therefore ರ = ೧೦.$$

ಇಲ್ಲವೆ, $೧.೨ರ - \frac{.೧೨ರ - .೦೨೫}{.೫} = .೪ರ + ೪.೪೫$

$$\therefore ೧.೨ರ - .೩೬ರ + .೦೫ = .೪ರ + ೪.೪೫$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೧೨೦ರ - ೩೬ರ + ೫ = ೪೦ರ + ೪೪೫$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧೨೦ರ - ೩೬ರ - ೪೦ರ = ೪೪೫ - ೫$

$$\therefore ೪೪ರ = ೪೪೦$$

$$\therefore ರ = ೧೦.$$

$$[ತಾಳಿ: ಎ. ಬಿ. = ೧೨ - \frac{೧.೨ರ - .೦೨೫}{.೫} = ೧೨ - ೩.೬ + .೦೫ = ೮.೫.]$$

$$ಬಿ. ಬಿ. = ೪ + ೪.೪೫ = ೮.೪೫.]$$

$$ಉ. ೩. \quad .೦೧೧ಯ + \frac{.೦೦೧ಯ - .೧೨೫}{.೬} = \frac{೫ - ಯ}{.೦೩} - .೧೪೫$$

$$\therefore .೦೧೧ಯ + \frac{.೦೧೧ಯ - ೧.೨೫}{೬} = \frac{೫೦೦ - ೧೦೦ಯ}{೩} - .೧೪೫*$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$.೦೬೬ಯ + .೦೧೧ಯ - ೧.೨೫ = ೧೦೦೦ - ೨೦೦ಯ - .೮೭$$

ವಕ್ರಾಂತರದಿಂದ, $\cdot ೦೬೬ಯ + \cdot ೦೧ಯ + ೨೦೦ಯ = ೧೦೦೦ - \cdot ೮೭ + ೧ \cdot ೨೫$

$$\therefore ೨೦೦ \cdot ೦೭೬ಯ = ೧೦೦೦ \cdot ೩೮$$

$$\therefore ಯ = ೫.$$

* ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಛೇದಗಳ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಗಂಭಿರ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಗಂಭಿರ ಗುಣಿಸಿದೆ. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪ ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. ಎರಡನೆಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದಶಾಂಶ ಚಿಹ್ನೆ ಒಂದು ಸ್ಥಳ ಮುಂದೆ ಸರಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಅಂದರೂ ನಡೆಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೧. $\cdot ೮ \cdot ೭೩ಯ + ೮ = ೫ \cdot ೨೩ಯ + ೧೫.$

೨. $೧೪ \cdot ೨೫ರ - ೨೩ = ೫೭ - ೫ \cdot ೭೫ರ.$

೩. $೯ \cdot ೫ವ - ೭ \cdot ೨೪ = ೧೨ \cdot ೬೫ವ - ೧೦ \cdot ೩೯.$

೪. $೩ \cdot ೬ಸ - \frac{\cdot ೭೨ಸ - \cdot ೦೫}{\cdot ೫} = \cdot ೯ಸ + ೬ \cdot ೪.$

೫. $\frac{೨೮ + \cdot ೫೬}{\cdot ೧೨೫} - \frac{೪೮ - \cdot ೪೨}{\cdot ೨೫} = ೬ \cdot ೧೬.$

೬. $\frac{೯ಪ್ಪ - \cdot ೩೫}{\cdot ೨೫} - \frac{೪ \cdot ೫ - ೮ಪ್ಪ}{\cdot ೫} + \frac{೨ಪ್ಪ - \cdot ೪೮}{\cdot ೧೨೫} = ೨ \cdot ೭೬.$

೭. $\frac{೪ಯ}{\cdot ೫} - \frac{೧}{\cdot ೦೫} + \frac{೪ಯ}{\cdot ೦೦೫} - \frac{೧}{\cdot ೦೦೦೫} = ೦.$

೮. $\cdot ೨೫ರ + \frac{\cdot ೧೨೫ರ - \cdot ೨೫}{\cdot ೬} - \frac{೧ \cdot ೫}{\cdot ೪} - \frac{\cdot ೧೪ರ - \cdot ೬೭}{\cdot ೯}$

೯. $\cdot ೭೨ಯ + \frac{\cdot ೦೬ + \cdot ೦೪}{\cdot ೦೬} - \frac{೧ \cdot ೨೩ಯ - ೪}{೯} = ೮ \cdot ೫.$

$$೧೦. \frac{.೩೧೫ವ+೩}{.೩} + \frac{.೨೭ವ-.೪}{.೦೮} - \frac{.೩೭೫ವ-೪.೫}{.೦೫} + \frac{.೦೫ವ-.೨೨೭}{.೦೧} = ೮೦.$$

$$೧೧. \frac{೩ಸ+೩}{.೦೩೨} + \frac{ಸ+೨}{.೦೧೬} + \frac{೩ಸ+೯}{.೦೬೪} = ೩೦೦೦.$$

$$೧೨. \frac{೨೧ಯ-೩}{.೦೧} - ೪ \left(\frac{೬ಯ}{.೦೩} - \frac{೧-ಯ}{.೦೨} \right) = ೭೬೦೦.$$

$$೧೩. \frac{.೧ರ+.೭}{.೦೩} - \frac{.೩ರ}{.೦೫} - \frac{.೧ರ-.೨}{.೦೧} - \frac{.೩ರ-೧.೧}{.೦೨} =$$

$$೧೪. \frac{.೦೧ವ+.೦೪}{೩} - \frac{.೦೩-.೦೭ವ}{೧೧} - \frac{.೦೦೧}{.೨} = .೦೨ + \frac{.೦೨ವ}{೮}.$$

$$೧೫. \frac{೨ಯ+೨.೫}{೩} - ೫ \left\{ ೨(೭-೨ಯ) - .೫ \right\} = \frac{.೫(೮ಯ-೭)}{೩}.$$

$$೧೬. \frac{೭ಯ-೪}{೩} + \frac{೫ಯ+೧}{೨} = ೮೫. \quad ೧೭. \frac{೬ಜ+೯}{೩೬} = ೩೯ - \frac{೪ಜ-೫}{೨೪}.$$

$$೧೮. \frac{ಯ-೪}{೮} - \frac{೨ಯ+೧}{೧೨} + \frac{೪ಯ-೬}{೩} = ೦.$$

$$೧೯. \frac{೧೦-ರ}{೧೦} - \frac{೧೧+ರ}{೫} = ೫ + \frac{ರ}{೫}.$$

$$೨೦. (೮ವ-೩)(೪ವ+೩)+೬=೨(೪ವ-೫)²-೭.$$

$$೨೧. \frac{೬ಯ-೧}{೪} - \frac{೧+೩ಯ}{೬} + \frac{೬ಯ-೧}{೧೨} = ೦.$$

$$೨೨. \frac{೨(೨ಸ+೩)}{೧೫} + \frac{ಸ}{೬} - \frac{೩ಸ+೨}{೧೦} - \frac{ಸ}{೧೨} = ೦.$$

$$೨೩. ೫\frac{೧}{೩} - \frac{೧}{೬}(೨ಯ-೧) = \frac{೨}{೩}(ಯ+೮) - \frac{ಯ}{೩}.$$

$$೨೪. \frac{೧}{೨}(ರ-\frac{೧}{೩}) + \frac{೧}{೫}(ರ-\frac{೧}{೬}) = \frac{೧೧}{೧೫}(ರ-\frac{೧}{೧೧}).$$

$$೨೫. \frac{ಲವ-೯}{೨೭} - \frac{೫ವ+೬}{೧೮} + \frac{೧೧ವ+೨೪}{೩೬} = ೦.$$

$$೨೬. \frac{೫}{೨} (೩ಯ - ೫) + \frac{೯ಯ}{೧೪} - \frac{೨}{೩} (೭ಯ - ೧) = ೧೨೨.$$

$$೨೭. \frac{೪}{೩} (೫ರ - ೩) - \frac{೫}{೪} (೨ರ + ೫) = ೨೦೨೯.$$

$$೨೮. \frac{೨(ವ-೨)}{೩} - \frac{೫-೭ವ}{೪} = \frac{೮-೯ವ}{೬}.$$

$$೨೯. \frac{೧೫}{೧೫} (೨ಯ - ೫) - \frac{೧೦}{೧೦} (೪ಯ - ೬೨) + \frac{೫}{೫} (೨ + ಯ) = ೦.$$

$$೩೦. ೫(೨ರ - ೮) - ೮(೩ರ - ೭) + ೨೫(೫ರ - ೧) = ೦.$$

$$೩೧. \frac{೮(೨ವ-೧)}{೫} - \frac{೧೪(ವ-೧)}{೩} = \frac{೪ವ-೫}{೪}.$$

$$೩೨. ೩ಯ - ೨ - \frac{೪}{೫} (ಯ - ೧) = \frac{೮ಯ - ೩}{೪}$$

ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸಮನೂನಿಕ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಯೂನಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೧.

೨.೧. ಉ. ೧. ಒಂದು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಒಂದು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ೩ ರೂ. ಇದ್ದು, ೩ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೧೦ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ೧೫ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನು ?

ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ಯ ರೂ. ಗಳಿದ್ದರೆ, ಚಹದ ದರವು (೩ಕ್ಕಿ - ಯ) ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಮೂರು ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು ೩(೩ಕ್ಕಿ - ಯ) ರೂ. ಇದ್ದು, ಹತ್ತು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆಯ ಬೆಲೆಯು ೧೦ಯ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ೩(೩ಕ್ಕಿ - ಯ) + ೧೦ಯ = ೧೫

$$\therefore 9\text{ಕ್ಕಿ} - 3\text{ಯ} + 10\text{ಯ} = 15$$

$$\therefore 2\text{ಯ} = 15\text{ಕ್ಕಿ} - 3\text{ಯ} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \text{ಯ} = 5\text{ಕ್ಕಿ}.$$

\therefore ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೨ ಆಣೆಗೆ ರತ್ತಲು ಮತ್ತು ಚಹದ ದರವು ೨೨ ರೂ. ರತ್ತಲು.

ಉ. ೨. ನಾಲ್ಕು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಒಂದು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೧೧ ರೂ. ೬ ಆ. ಇದ್ದು ೭ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೪ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೨೧ ರೂ. ೧೪ ಆ. ಆಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನು ?

ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ಒಂದು ರತ್ತಲಿಗೆ ಯ ರೂ. ಗಳೆಂದು ತಿಳಿದರೆ, ೪ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು (೧೧ಕ್ಕಿ - ಯ) ರೂ. ಆಗುವದು, ಅಂದರೆ ಚಹದ ರತ್ತಲಿನ ದರವು ೨(೧೧ಕ್ಕಿ - ಯ) ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೭ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು ೭(೧೧ಕ್ಕಿ - ಯ) ರೂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ೪ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆಯ ಬೆಲೆಯು ೪ಯ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ೭(೧೧ಕ್ಕಿ - ಯ) + ೪ಯ = ೨೧ಕ್ಕಿ

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೭ (೧೧೯ - ೪) + ೧೭೪ = ೮೭೨

$$\therefore ೭೯೫ - ೭೪ + ೧೭೪ = ೮೭೨$$

$$\therefore ೯೪ = ೭೯೫ ಅಥವಾ ೪ = ೯೫.$$

\therefore ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೪ ಆ. ರತ್ತಲು ಮತ್ತು ಚಹದ ದರವು ೯ (೧೯೫ - ೯೫) ರೂ. ಅಂದರೆ (೯೫ \times ೧೦೦) ರೂ. ಅಂದರೆ ೨ ರೂ. ೧೦ ಆ. ರತ್ತಲು.

ಉ. ೩. ನಾಲ್ಕು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಮೂರು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೧೧ ರೂ. ೬ ಆ. ಇದ್ದು, ಐದು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಹನ್ನೆರಡು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೧೯ ರೂ. ೬ ಆ. ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನು ?

ಸಕ್ಕರೆಯ ರತ್ತಲಿನ ದರವು ೪ ರೂ. ಗಳೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, ೩ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆಯ ಬೆಲೆಯು ೩೪ ರೂ. ಆಗುವದು, ಆದುದರಿಂದ ೪ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು (೧೯೫ - ೩೪) ರೂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ಚಹದ ರತ್ತಲಿನ ದರವು ೯ (೧೯೫ - ೩೪) ರೂ. ಆಗುವದು.

ಆದುದರಿಂದ, $\therefore ೫(೧೯೫ - ೩೪) + ೧೨೪ = ೧೯೫$
ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೫ (೧೯೫ - ೩೪) + ೪೮೪ = ೭೭೨

$$\therefore ೫೯೫ - ೧೫೪ + ೪೮೪ = ೭೭೨$$

$$\therefore ೩೩೪ = ೨೦೫ = ೧೭೫ ಅಥವಾ ೪ = ೫.$$

\therefore ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೦ ಆ. ಮತ್ತು ಚಹದ ದರವು ೯ (೧೯೫ - ೩೪) ರೂ., ಅಂದರೆ ೯ (೧೯೫ - ೧೭೫) ರೂ., ಅಂದರೆ (೯೫ \times ೧೦) ರೂ., ಅಂದರೆ ೨೫ ರೂ., ಅಂದರೆ ೨ ರೂ. ೬ ಆ.

ಉ. ೪. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನಲ್ಲಿಟ್ಟ ಹಣದೊಳಗಿನ ಕೆಲವನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟನು, ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ೨೧೫೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಮೊದಲನೆಯ ಹಣವನ್ನು ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಅವನು ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವನ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೦೦ ರೂ. ಗಳಿಂದ

ಹೆಚ್ಚು ಅಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದನು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಯ ರೂ. ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಆ ಠೇವಿನ ಮೂಲಕ ಸಿಗುವ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{ಯ}{೨೫}$ ರೂ. ಇರುವದು. ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೫೦ ರೂ. ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಠೇವಿನಿಂದ ಸಿಗುವ ಉತ್ಪನ್ನವು $(೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ಇರುವದು. ಈ ಠೇವಿಗಳ ದರದಲ್ಲಿ ಇದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಅದು ೨೦ $(೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ರಕಮಿನದಿರುವದು. ಈಗ ಯ ರೂ. ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಡದೆ ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{ಯ}{೨೦}$ ರೂ. ಬರುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು ೨೦ $(೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಡದೆ ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಆ ರಕಮಿನ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{೨೫೦}{೨೫} (೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ., ಅಂದರೆ $\frac{೫}{೨೫} (೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಈಗ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೫೦ ರೂ. ಬರುತ್ತಿತ್ತು ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ

$$\frac{ಯ}{೨೦} + \frac{೫}{೨೫} (೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫}) = ೨೫೦$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$ಯ + ೧೬ (೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫}) = ೪೭೦೦೦$$

$$\therefore ಯ + ೩೪೪೦೦ - \frac{೧೬೫೦೦}{೨೫} = ೪೭೦೦೦$$

$$\therefore \frac{೯೫೦೦}{೨೫} = ೧೨೮೦೦$$

$$\therefore \frac{ಯ}{೨೫} = ೧೪೦೦$$

$$\therefore ಯ = ೩೫೦೦೦$$

$$ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರಕಮು = ೨೦ (೨೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫}) ರೂ. =$$

$$೨೦ (೨೫೦ - ೧೪೦೦) ರೂ. = (೨೦ \times ೭೫೦) ರೂ. = ೧೫೦೦೦ ರೂ.$$

\therefore ೩೫೦೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೧೫೦೦೦ ರೂ. ಇವು ಆ ಎರಡು ರಕಮುಗಳು.

೨.೨. ಮೇಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಯಾವದಾದರೂ ಒಂದು (ಆದರೆ ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅನುಕೂಲವಿರುವ) ಅಜ್ಞಾತಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಈ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮಾಡಿ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಬೇರೆ ಸಂಗತಿಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. ಆದರೆ ನಾವು ಈ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವಾ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಮಾರ್ಗದಂತೆಯೇ ಹೋಗಿ ಅದನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೊಂದು ಅನುಕೂಲವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಉ. ೫. ಒಂದು ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೬ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೬ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದೋ ಅದು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೯ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ಇಂಥ ಎರಡು ಅಂಕಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಪರಿಚಯವು ಹಿಂದಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಕರಣದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಆಗಿದೆ; ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕುಂಸ್ಥಾನದ ಇಲ್ಲವೆ ದಹಂಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು “ಯ” ದಿಂದಾಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವದಾದರೂ ಅವ್ಯಕ್ತದಿಂದ ಮಾಡಿ ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು, ಉಳಿದ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ನಾವು ಆ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವೆವು. ಆದರೆ ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಮಾಡಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದರಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವೇನೂ ಸಹಾಯವು ದೊರೆಯುವದೆಂದು ತೋರುವದಿಲ್ಲ. ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದಿಂದ ಮಾಡಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡದೆಯೂ ಅಲ್ಲಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ) ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿದರೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುಂಟು ನಮಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರಬಹುದು. ಆದರೆ ಆ

ಮಾರ್ಗವು ತಿಳಿಯಲು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲವೆಂದು ನಾವು ಬೇರೊಂದು ಸುಲಭ ದಾರಿಯಿಂದ ಹೋಗುವಾ.

ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಅಂಕಗಳದು. ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ಣಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಅವುಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಬೈಜಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಬರೆಯಬಹುದು. ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವ, ಇವು ಇರುತ್ತವೆಂದು ನಾವು ಕಲ್ಪಿಸುವಾ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು $೧೦ಯ + ವ$ ಆಗುವದು, $ಯ + ವ$ ಇದು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಆಗುವದು ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳೆ ಅದಲಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು $೧೦ವ + ಯ$ ಆಗುವದು. ಈಗ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೬ ಪಟ್ಟಿನಗಿಂತ ೬ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಇದರ ಬೈಜಿಕ ಭಾಷಾಂತರವು $೧೦ಯ + ವ = ೬ (ಯ + ವ) + ೬$.

ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲಬದಲು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಸಿದ್ಧವಾದ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿನಗಿಂತ ೯ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನದ ಬೈಜಿಕ ಭಾಷಾಂತರವು $೧೦ವ + ಯ = ೪ (ಯ + ವ) + ೯$.

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಎದುರು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವವು. ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಆ ಎರಡೂ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು (ಬೆಲೆಗಳನ್ನು) ಹೇಳಬಹುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

೨.೩. ಈಗ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಹಿಂದೆ ಹೊರಳಿ ನೋಡುವಾ. ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದ ೨.೧ ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಕ್ಕರೆ ಮತ್ತು ಚಹದ ಒಂದೊಂದು ಪೌಂಡಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ನಮಗೆ ಹೇಳಿದೆ. ಆ ದರಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ನಾವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ

ಯ ರೂ. ಮತ್ತು ವ ರೂ. ಎಂದು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ

$$\text{ಯ} + \text{ವ} = ೩೯, \quad ೧೦\text{ಯ} + ೩\text{ವ} = ೧೫; \quad (\text{ಉ. ೧.})$$

$$\text{ಯ} + ೪\text{ವ} = ೧೧, \quad ೪\text{ಯ} + ೭\text{ವ} = ೨೧; \quad (\text{ಉ. ೨.})$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೩\text{ಯ} + ೪\text{ವ} = ೧೧, \quad ೧೨\text{ಯ} + ೫\text{ವ} = ೧೯; \quad (\text{ಉ. ೩.})$$

ಹೀಗೆಯೇ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು ಅಲ್ಲವೇ ?

ಮತ್ತು ೪ ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ೪ ದರದ ಶೇವು ಯ ರೂ. ಗಳದು ಮತ್ತು ೫ ದರದ ಶೇವು ವ ರೂ. ಗಳದು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ

$$\frac{\text{ಯ}}{೨೫} + \frac{\text{ವ}}{೨೦} = ೨೧೫೦, \quad \frac{\text{ಯ}}{೨೦} + \frac{\text{ವ}}{೨೫} = ೨೩೫೦ \quad (\text{ಉ. ೪.})$$

ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು ಅಲ್ಲವೇ ?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಎದುರು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳು ಇರುವವು. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಅದರೊಳಗಿನ ಎರಡೂ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು (ಬೆಲೆಗಳನ್ನು) ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನಾವು ನೋಡುವಾ.

೨.

೨.೪. ಉ. ೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯು ೪ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬೇರೀಜು ೧೮ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೇಲಿಂದ,

$$\text{ಯ} - \text{ವ} = ೪ \dots\dots\dots (೧) \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \text{ಯ} + \text{ವ} = ೧೮ \dots\dots\dots (೨)$$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಮಗೆ ಸಿಗುವವು.

ಕೇವಲ ಸಮೀಕರಣ (೧)ರ ವಿಷಯವಾಗಿಯೇ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಯ ಮತ್ತು ವ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಕಂಡು ಬರುವವು. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ

ಯ =	೫	೬	೭	೮	೯	೧೦	೧೧	೧೨	೧೩	೧೪	ಇ.
ಇದ್ದರೆ											
ವ =	೧	೨	೩	೪	೫	೬	೭	೮	೯	೧೦	ಇ.

ಹಾಗೆಯೇ ಕೇವಲ ಸಮೀಕರಣ (೨) ನೆಯದರ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಯ ಮತ್ತು ವ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಎಷ್ಟೋ ಜೋಡಿಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವವು.

ಯ =	೬	೭	೮	೯	೧೦	೧೧	೧೨	೧೩	೧೪	೧೫	ಇ.
ಇದ್ದರೆ											
ವ =	೧೨	೧೧	೧೦	೯	೮	೭	೬	೫	೪	೩	ಇ.

ಈಗ ನಮಗೆ ಯ ಮತ್ತು ವ ಇವುಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಅವು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವಂಥವು; ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಯ = ೧೧, ವ = ೭ ಇದು ಆ ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ೧೧ ಮತ್ತು ೭ ಇವು ಆ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

೨.೫. ಈಗ ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವ ಜೋಡಿಯು ಸಾಧಾರಣವಿದೆ ಎಂದು ನೋಡುವದು ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ವೇಳೆಯ ಬಹಳ ಅಪವ್ಯಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬೇಗನೆ ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯುವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬೇಕು. ಎರಡು ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ) ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಕೂಡಿಸಿ ಬಂದ ಬೇರೀಜುಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮೇಲಿನ ನೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಯ - ವ ಮತ್ತು ೪ ಸಮಾನವಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ + ವ

ಮತ್ತು ೧೮ ಇವು ಸಮಾನವಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದ ಮೇಲೆ ಯ - ವ ಮತ್ತು ಯ + ವ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೪ ಮತ್ತು ೧೮ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿ ಇರಬೇಕು. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯು ಕೆಳಗೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಂದು ನೋಡಿರಿ.

$$\text{ಯ} - \text{ವ} = ೪ \dots\dots\dots (೧)$$

$$\text{ಯ} + \text{ವ} = ೧೮ \dots\dots\dots (೨)$$

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ

$$೨ಯ = ೨೨ \text{ ಅಂದರೆಯೇ } ಯ = ೧೧.$$

ಸಮೀಕರಣ (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ೧೧ ಹಾಕಿದರೆ, ವ = ೭.

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ (೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದ ಮೂಲಕ ವ ದ ಲೋಪವಾಯಿತು ಮತ್ತು ಯ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬಂದಿತು ಮತ್ತು ಈ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು (೧) ಅಥವಾ (೨) ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ವ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ.

[(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದು ಅಂದರೆ ಸಮೀಕರಣ (೧) ರ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (೨) ರ ಎಡಬದಿಯನ್ನೂ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬಲಬದಿಯನ್ನೂ ಕೂಡಿಸುವದಿರುತ್ತದೆ. (೧) ರೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯುವದೆಂದರೆ (೧) ನೆಯದರ ಎಡಬದಿಯೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದರ ಎಡಬದಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯಿಂದ ಬಲಬದಿಯನ್ನು ಕಳೆಯುವದಿರುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೂ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು (ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಿಸುವದು) ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು (ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಿಸುವದು) ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಬೇರೀಜುಗಳು, ವಜಾಬಾಕಿಗಳು, ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ.]

ಉ. ೨. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ೫ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಬೇರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ೭ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೫ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ಮೊದಲನೆಯದರ ೮ ಪಟ್ಟುನೊಳಗಿಂದ ಎರಡನೆಯದರ ೭ ಪಟ್ಟನ್ನು ಕಳೆದರೆ ೩೬ ಶೇಷವು ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೮ ಎಂದು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ೯ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ,

$$೫ರ + ೭ನ = ೧೫ \dots\dots\dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೮ರ - ೭ನ = ೩೬ \dots\dots\dots (೨)$$

ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೨೯

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, $೧೩ರ = ೧೯೫$
ಇಲ್ಲವೆ $ರ = ೧೫.$

(೧) ರಲ್ಲಿ ರದ ಬದಲಾಗಿ ೧೫ ಇಟ್ಟರೆ, $೭೫ + ೭ವ = ೧೯೯$
 $\therefore ೭ವ = ೮೪, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೧೨.$

\therefore ೧೫ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩.

- | | | |
|----------------------|----------------------|---------------------|
| ೧. $೫ಯ-೩ರ = ೧,$ | ೨. $೮ಯ-೫ವ = ೧೪,$ | ೩. $೧೬ರ + ೭ಲ = ೩೭,$ |
| $೮ಯ + ೩ರ = ೨೫.$ | $೯ಯ + ೫ವ = ೩೭.$ | $೨೫ರ - ೭ಲ = ೪.$ |
| ೪. $೯ವ - ೪ಸ = ೫೮,$ | ೫. $೩ಯ + ೮ರ = ೧೩,$ | ೬. $೨ಯ - ೫ಸ = ೫೦,$ |
| $೫ವ + ೪ಸ = ೮೨.$ | $೫ಯ - ೮ರ = -೨೧.$ | $೪ಯ + ೫ಸ = ೧೦.$ |
| ೭. $೯ವ - ೫ಸ = ೧೭,$ | ೮. $೨೫ಲ - ೮ವ = -೧೪,$ | ೯. $೧೧ಯ + ೬ಲ = ೯೧,$ |
| $೮ವ + ೫ಸ = ೩೪.$ | $೩ಲ + ೮ವ = ೭೦.$ | $೭ಯ - ೬ಲ = -೧.$ |
| ೧೦. $೧೩ರ - ೪ಸ = ೮೮,$ | ೧೧. $೪ಯ - ೧೧ವ = ೧೯,$ | ೧೨. $೮ಯ - ೫ರ = ೧೩,$ |
| $೫ರ + ೪ಸ = ೫೬.$ | $೭ಯ + ೧೧ವ = ೩.$ | $೯ಯ + ೫ರ = ೪.$ |

೨.೬. ಉ. ೩. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ೫ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೭ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೨೪ ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ನೊದಲನೆಯದರ ೨ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ೭ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೦೦ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

ನೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ವ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ,

$೫ಯ + ೭ವ = ೧೨೪ \dots \dots \dots (೧)$

ಮತ್ತು $೨ಯ + ೭ವ = ೧೦೦ \dots \dots \dots (೨)$

ಎರಡು ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿಂದ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿಂದ) ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಕಳೆದರೆ ಬರುವ ಶೇಷಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಅದರಂತೆ

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ (೧) ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ ವದ ಲೋಪವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೩ಯ = ೨೪, ಅಂದರೆಯೇ ಯ = ೮ ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಈಗ (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯದ ಬದಲಾಗಿ ೮ ಹಾಕಿದರೆ $೧೬ + ೭ = ೧೦೦$, ಅಂದರೆ ೭ = ೮೪ ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೧೨.

∴ ೮ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವು ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಉ. ೪. ೮ ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ೧೫ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣುಗಳು ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ೩ ರೂ. ೧೩ ಆ. ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೮ ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ೯ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣುಗಳು ೨ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ದರವೆಷ್ಟು?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಲೆ ಸ ಆ. ಮತ್ತು ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಲೆ ಮ ಆ. ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ,
 $೮ಸ + ೧೫ಮ = ೬೧$(೧)
 ಮತ್ತು $೮ಸ + ೯ಮ = ೪೩$(೨)

(೧) ನೆಯದೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ,
 $೬ಮ = ೧೮$, ಇಲ್ಲವೆ $ಮ = ೩$.

ಮದ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ, $೮ಸ + ೨೭ = ೪೩$
 ∴ $೮ಸ = ೧೬$, ಇಲ್ಲವೆ $ಸ = ೨$.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣಿನ ದರವು ೨ ಆ. ಮತ್ತು ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣಿನ ದರವು ೩ ಆ.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೪.

- | | | |
|-----------------|----------------|-----------------|
| ೧. ೮ಯ+೫ವ=೩೪, | ೨. ೨೩ಯ+೧೮ರ=೫೯, | ೩. ೧೯ರ-೩ಸ=೧೦, |
| ೩ಯ+೫ವ=೧೯. | ೫ಯ+೧೮ರ=೪೧. | ೧೦ರ-೩ಸ= ೧. |
| ೪. ೮ಸ+೨೧ಮ=೪೬, | ೫. ೧೪ಯ+ ೫ರ=೪೨, | ೬. ೧೯ಲ-೪ವ=-೨, |
| ೮ಸ+೧೯ಮ=೪೨. | ೧೪ಯ+ ೮ರ=೬೩. | ೨೧ಲ-೪ವ= ೨. |
| ೭. ೮ವ-೩ಸ=೪೯, | ೮. ೧೭ದ+೧೩ನ=೬೦, | ೯. ೫ಯ+೧೪ರ=೪೩, |
| ೧೧ವ-೩ಸ=೬೪. | ೨೮ದ +೧೩ನ=೮೨. | ೫ಯ+ ೮ರ=೩೧. |
| ೧೦. ೨೩ಸ-೧೪ಮ=೫೯, | ೧೧. ೯ಯ-೭ವ=೨೫, | ೧೨. ೧೨ಲ+೧೧ವ=೨೮, |
| ೧೫ಸ-೧೪ಮ=೧೯. | ೩ಯ-೭ವ=೧೩. | ೧೬ಲ+೧೧ವ=೩೦. |

೨.೨. ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದು ಸುಲಭವೆನಿಸುವದು ಅಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವದು ಸುಲಭವೆನಿಸುವದು ಅಲ್ಲಿ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನೂ ಮಾಡಿ, ಮೊದಲು ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಿದ ತರುವಾಯ ಉಳಿದ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಈ ಬೆಲೆಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಆದರೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬೇರೀಜಿನಿಂದಾಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದಾಗಲಿ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವವೋ ? ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ,

ಪ. ೨.೩, ಉ. ೧ ರಲ್ಲಿ $y + v = ೩೪$(೧)

ಮತ್ತು $೧೦y + ೩v = ೧೫$(೨)

ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬೇರೀಜಿನಿಂದಾಗಲಿ ಅಥವಾ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದಾಗಲಿ ನಮಗೆ ಯಾವ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನೂ ಮಾಡಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ:— (೧) ರಲ್ಲಿ y ದ ಸಹಗುಣಕವು ೧೦ ಇದ್ದರೆ ಅಥವಾ v ದ ಸಹಗುಣಕವು ೩ ಇದ್ದರೆ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಆ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಿ ಬೇರೆ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಸಮಾನ ರಾಶಿಯನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು) ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ, (೧) ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೩y + ೩v = ೯೪$(೧ ಅ) ೨ ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೧ ಅ) ವನ್ನು ಕಳೆದರೆ, $೭y = ೫೪$ ಇಲ್ಲವೆ $y = ೭$ ಮತ್ತು y ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿ $v = ೨೭$.

$y = ೭$; $v = ೨೭$.

ಆದೇ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಉ. ೨. ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

$$\text{ಯ} + \text{೪ವ} = ೧೧\text{ಷ್ಟಿ} \dots\dots\dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } \text{೪ಯ} + ೭ವ = ೨೧\text{ಷ್ಟಿ} \dots\dots\dots (೨)$$

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ (೧) ನ್ನು ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಯ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ (೧)ನ್ನು ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$\text{೪ಯ} + ೧೭ವ = ೪೫\text{ಷ್ಟಿ} \dots\dots\dots (೧೨)$$

ಮತ್ತು (೧೨) ದೊಳಗಿಂದ (೨) ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

$$೯ವ = ೨೩\text{ಷ್ಟಿ}, \text{ ಇಲ್ಲವೆ } ವ = ೨\text{ಷ್ಟಿ}.$$

ಮತ್ತು ವ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ

$$\text{ಯ} + ೧೦\text{ಷ್ಟಿ} = ೧೧\text{ಷ್ಟಿ}, \text{ ಇಲ್ಲವೆ } ಯ = ೧\text{ಷ್ಟಿ}.$$

$$\therefore \text{ಯ} = ೧\text{ಷ್ಟಿ}; \quad \text{ವ} = ೨\text{ಷ್ಟಿ}.$$

ಅದೇ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಉ. ೩. ನೆಯದೊಳಗಿನ ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣ-ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$$೩ಯ + ೪ವ = ೧೧\text{ಷ್ಟಿ} \dots\dots\dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೧೨ಯ + ೫ವ = ೧೯\text{ಷ್ಟಿ} \dots\dots\dots (೨)$$

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ (೧) ನ್ನು ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಯ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ವ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ (೧)ನ್ನು ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$೧೨ಯ + ೧೭ವ = ೪೫\text{ಷ್ಟಿ} \dots\dots\dots (೧೨)$$

ಮತ್ತು (೧೨) ದೊಳಗಿಂದ (೨)ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದು ೧೧ವ = ೨೩ಷ್ಟಿ, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೨ಷ್ಟಿ ಮತ್ತು (೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ವ = ೨ಷ್ಟಿ ಹಾಕಿ ೩ಯ + ೯ಷ್ಟಿ = ೧೧ಷ್ಟಿ

$$\therefore ೩ಯ = ೧೧\text{ಷ್ಟಿ}, \text{ ಇಲ್ಲವೆ } ಯ = ೩\text{ಷ್ಟಿ}.$$

$$\text{ಯ} = ೩\text{ಷ್ಟಿ}; \quad \text{ವ} = ೨\text{ಷ್ಟಿ}.$$

ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೫.

೧. ೨೫ಯ + ೮ವ = ೫೮, ೨. ೮ಯ + ೩ವ = ೩೦, ೩. ೯ಯ + ೭ವ = ೫೦,
 ೩ಯ + ೮ವ = ೭. ೫ಯ + ೮ವ = ೧೭. ೫ಯ + ೭ವ = ೨೨.

ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೩೩

೪. $೧೪ಪ+೫ಮ=೫೨$, $೫. ೪ಯ+೧೧ವ=೪೯$, $೬. ೧೦ಪ-೩ಮ=೪೪$,
 $೯ಪ+ಮ = ೨೯$. $ಯ-೩ವ = -೫$. $ಪ+೮ಮ = ೨೧$.
 ೭. $೭ನ+೧೩ಮ=೪೭$, $೮. ೫ಯ-೨೨ವ= ೩$, $೯. ೧೨ರ-೫ಪ = ೧೪$,
 $೮ನ+ಮ = ೨೬$. $ಯ-೪ವ = ೧$. $೮ರ-ಪ = ೧೪$.
 ೧೦. $೩ಯ+೮ವ = ೩೪$, $೧೧. ೨೩ಪ+೨೧ಮ=೫೩$, $೧೨. ೨೪ಯ+೧೧ರ=೨೩$,
 $ಯ-೫ವ = -೪$. $ಪ-೩ಮ = ೧$. $೧೬ಯ+ರ = ೯$.
 ೧೩. $೩ಪ+೭ಬ = ೩೨$, $೧೪. ೧೭ನ-೩ಪ = ೯೪$, $೧೫. ೨೨ಯ-೯ಲ = -೭$,
 $ಪ-೮ಬ = -೧೦$. $೭ನ-ಪ = ೩೮$. $೧೬ಯ-ಲ = ೬$.
 ೧೬. $೨೫ರ+೧೨ವ=೪೧$, $೧೭. ೨೦ಯ+೭ರ=೧೧$, $೧೮. ೯ಯ-೧೧ವ = ೨೫$,
 $೩೫ರ-ವ = ೪$. $೫ಯ+೮ರ=೯$. $೨೭ಯ+೨ವ = ೫$.

೨.೮. ಈಗ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ೧೦ ರತ್ನಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೮ ರತ್ನಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳಿಗೆ ಹೋದ ನಾರದಲ್ಲಿ ೩೧ ರೂ. ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಈಗ ಚಹದ ದರವು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೦ ರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾದ ಮೂಲಕ ಅವೇ ಸರಕುಗಳಿಗೆ ೩೫ ರೂ. ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ರತ್ನಲಿನ ದರವು ಕಳೆದ ನಾರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟಿತ್ತು ?

ಚಹದ ಹಳೇ ದರವು ರತ್ನಲಿಗೆ ಯ ರೂ. ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ವ ರೂ. ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಹೊಸ ದರಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿ ರೂ. ಮತ್ತು ಳ್ಲೆ ವ ರೂ. ಇರುವವು. ಆದುದರಿಂದ,

$$೧೦ಯ + ೮ವ = ೩೧.....(೧)$$

$$ಮತ್ತು ೧೧ಯ + ೧೦ವ = ೩೫.....(೨)$$

ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬಂದ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪ ಮಾಡುವದಾದರೆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಹಗುಣಕವು ಒಂದೇ ಇರುವಂತೆ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಈಗ ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ವ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ (೧)ನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಮತ್ತು (೨)ನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು-

ಗುವದು. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ವ ದ ಸಹಗುಣಕವು ೪೦ (೮ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ.) ಇರುವದು, ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಯ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ (೧) ನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ (೨) ನ್ನು ೧೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಯ ದ ಸಹಗುಣಕವು ೧೧೦ (೧೦ ಮತ್ತು ೧೧ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ.) ಬರುವದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದರೂ ಆಗುವದು. ಆದರೂ ಎರಡೂ ಮಾರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದದ್ದು, ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಗಳು ಸ್ವಲ್ಪ ದೊಡ್ಡವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ,

(೧) ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೫೦ಯ + ೪೦ವ = ೧೫೫.....(೧೮)$$

(೨) ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೪೪ಯ + ೪೦ವ = ೧೪೦.....(೨೦)$$

(೧೮) ದೊಳಗಿಂದ (೨೦) ವನ್ನು ಕಳೆದು

$$೬ಯ = ೧೫, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೨೨.$$

(೧) ರಲ್ಲಿ ಯ = ೨೨ ವನ್ನು ಹಾಕಿ ೨೫ + ೮ವ = ೩೧,

$$\therefore ೮ವ = ೬, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೪.$$

\therefore ಚಹವು ೨೨ ರೂ. ಒಂದು ರತ್ನಲು; ಸಕ್ಕರೆಯು ೧೨ ಆ. ಒಂದು ರತ್ನಲು.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು :

(೧) ನೆಯದರ ೧೫ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದರೆ ೧೨೨ಯ + ೧೦ವ = ೩೮೫....(೧೮)

$$೧೧ಯ + ೧೦ವ = ೩೫.....(೨)$$

(೧೮) ದೊಳಗಿಂದ (೨) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ೧೧೨ಯ = ೩೫, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೨೨.

ಉ. ೨. ಸುಧೀರನ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಸುಹಾಸನ ವಯಸ್ಸಿನ ೭ ಪಟ್ಟನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ೧೪೦ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಸುಧೀರನ ವಯಸ್ಸಿನ ೫ ಪಟ್ಟಿನೊಳಗಿಂದ ಸುಹಾಸನ ವಯಸ್ಸಿನ ೪ ಪಟ್ಟನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೨೨ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೩೫

ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ವ ವರ್ಷ-
ಗಳು ಇದ್ದರೆ, $೪ಯ + ೭ವ = ೧೪೦.....(೧)$

ಮತ್ತು $೫ಯ - ೪ವ = ೨೨.....(೨)$

(೧) ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$೧೬ಯ + ೨೮ವ = ೫೬೦.....(೧ಅ)$

ಮತ್ತು (೨)ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$೩೫ಯ - ೨೮ವ = ೧೫೪.....(೨ಅ)$

(೧ಅ) ಮತ್ತು (೨ಅ) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ,

$೫೧ಯ = ೭೧೪$, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೧೪.

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ = ೧೪ ಹಾಕಿ, $೫೬ + ೭ವ = ೧೪೦$

$\therefore ೭ವ = ೮೪$, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೧೨.

\therefore ಸುಧೀರನು ೧೪ ವರ್ಷದವನು, ಸುಹಾಸನು ೧೨ ವರ್ಷದವನು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

೧. $೮ಯ + ೩ರ = ೧೪$, ೨. $೯ಯ + ೫ವ = ೨೩$, ೩. $೩ಪ - ೮ಮ = ೧$,
 $೫ಯ + ೭ರ = ೧೯$. $೪ಯ + ೧೧ವ = ೧೯$. $೮ಪ + ೫ಮ = ೨೯$.

೪. $೧೨ದ + ೫ನ = ೩೪$, ೫. $೧೧ಯ + ೩ವ = ೪೫$, ೬. $೨೮ರ - ೧೭ವ = ೩೧$,
 $೭ದ + ೨ನ = ೧೮$. $೯ಯ - ೫ವ = ೭$. $೧೬ರ - ೯ವ = ೧೭$.

೭. $೨೫ಪ - ೧೩ಮ = -೧$, ೮. $೧೨ಯ - ೭ಸ = ೮$, ೯. $೯ಯ + ೭ರ = ೩೦$,
 $೧೮ಪ - ೭ಮ = ೩೨$. $೧೦ಯ + ೩ಸ = ೪೨$. $೮ಯ - ೫ರ = -೭$.

೧೦. $೧೮ಮ - ೧೧ವ = ೧$, ೧೧. $೨೪ಯ + ೭ವ = ೪೩$, ೧೨. $೪ಯ + ೬ಲ = ೧೧$,
 $೨ಮ + ೭ವ = ೩೩$. $೧೫ಯ - ೨ವ = -೫$. $೯ಯ - ೧೦ಲ = ೧೩$.

೧೩. $೩೬ವ - ೫ಸ = -೪$, ೧೪. $೧೦ಯ - ೩ರ = -೧೩$, ೧೫. $೨೬ಯ + ೩ವ = ೩೨$,
 $೩೦ವ + ೨ಸ = ೯$. $೧೫ಯ + ೨ರ = ೧೩$. $೫ಯ - ೨ವ = ೧$.

೧೬. $೮ಪ + ೭ಮ = ೧೬$, ೧೭. $೪ಯ + ೯ವ = ೧$, ೧೮. $೫ಕ - ೭ಗ = -೧$,
 $೧೨ಪ - ೫ಮ = -೭$. $೧೮ಯ + ೫ವ = -೩೧$. $೭ಕ + ೩ಗ = -೨೭$.

೧೯. ೩ಯ+೧೦ರ=-೫, ೨೦. ೮ನ+೩ಮ =೪೨, ೨೧. ೧೪ರ-೧೧ಸ=೧೫,
 ೪ಯ+೧೩ರ=-೭. ೬ನ-೫ಮ =೪೬. ೨೨ರ-೧೫ಸ =೧೯.

ಹೋದ ವರ್ಷ ಮತ್ತು ಈ ವರ್ಷದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸಿದವೋ ಅವುಗಳ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕಿಂತ ಈಗ ನಾವು ಬಿಡಿಸತೊಡಗಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪವು ಸ್ವಲ್ಪ ಭಿನ್ನವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಪ್ರಕಾರದ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತವಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ನಮಗೆ ಆ ಸಮೀಕರಣದೊಳಗಿನ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಹೊಸ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿ ಬರುತ್ತವೆಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತವಿರುವಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಏಕವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗೆ ನಾವು ನೋಡಿದ ಏಕವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೂ ಒಂದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸುಬೋಧ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದ ತರುವಾಯ ನಮಗೆ $ಅಯ + ಪ = ೦$ ಇಲ್ಲವೆ ಆಯ = ಮ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಯದ ಮೊದಲನೇ ಘಾತವೇ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಏಕವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಸಾದಾ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದಲೂ ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಇದೇ ಹೆಸರು ವಿಶೇಷ ಪರಿಚಿತವಾದದ್ದು. $೬ಯ + ಯ - ೧೫ = ೦$ ಇಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತವಿರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಏಕವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ. ಅದರೆ ಏಕಘಾತ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಅದರಲ್ಲಿ ಯದ ಎರಡನೆಯ ಘಾತವಿರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಏಕವರ್ಣ ದ್ವಿಘಾತ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಪರಿಚಿತವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದ್ವಿವರ್ಣವಿದ್ದವಲ್ಲದೆ ಏಕಘಾತದವಿರುತ್ತವೆ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳ (ಬೆಲೆಗಳ) ಆಸಂಖ್ಯೆ ಜೋಡಿಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಅದರೆ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಸರಿ ಇರುವ ಎರಡು ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಸರಿ ಬರುವಂಥ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಒಂದೇ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಒಂದು ಬೆಲೆಯು) ಇರುತ್ತದೆ.

ಮಧ್ಯಾಹ್ನ ೧೨ ಘಂಟೆಗೆ ಒಂದು ಮೋಟಾರು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಪುಣೆಗೆ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೨೬ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಪುಣೆಯಿಂದ ಮುಂಬಯಿ ಕಡೆಗೆ ೨೪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಲು ಹೊರಟವು. ಆ ಎರಡು ಉರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ೧೨೦ ಮೈಲುಗಳಾದೊಬ್ಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯ-ದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಎಷ್ಟು ಘಂಟೆಗೆ ಮತ್ತು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಅವು ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುವವು, ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ನಮ್ಮ ಎದುರು ಇರುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಪುಣೆಯ ಕಡೆಗೆ ಹೋಗುವ ಗಾಡಿಯು ಕ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ೨೬ ಕ ಮೈಲು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

∴ ಕ ತಾಸುಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ೨೬ ಕ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

∴ ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ $a = ೨೬$ ಕ ಈ ಸೂತ್ರವು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಆ ಗಾಡಿಯು ಯಾವಾಗ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಪುಣೆಯಿಂದ ಮುಂಬಯಿ ಕಡೆಗೆ ಹೋಗುವ ಗಾಡಿಯು ಕ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ೨೪ ಕ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

∴ ಕ ತಾಸುಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ (೧೨೦-೨೪ಕ) ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

∴ ಎರಡನೇ ಗಾಡಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ $a = ೧೨೦ - ೨೪ಕ$ ಈ ಸೂತ್ರವು ಯಾವಾಗ್ಗೆ ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಆ ಗಾಡಿಯು ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳ ಪ್ರವಾಸದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವೆರಡೂ ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುವವೋ ಇಂಥ ಒಂದು ಕ್ಷಣವು ಬರುವದು. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಅಂತರವು (ಅ) ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಆ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಆ ಅಂತರ-ವಿರಬೇಕಾದರೆ $a = ೨೬$ ಕ ಮತ್ತು $a = ೧೨೦ - ೨೪ಕ$ ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಿಜವಿರುವವು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ಕ ದ ಬೆಲೆಯು (೨೨) ಇದ್ದಾಗ್ಗೆ ಅದ ಬೆಲೆಯು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ (೨೨) ಇರುವದು. ಅಂದರೆಯೇಕೆ ಮತ್ತು ಅ ಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ನಿಜವಿರುವವು. ಇಂಥ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ನಾವು ಸಮಮಾನಿಕ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಯಾನಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪, ೫, ಮತ್ತು ೬ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಸಮಮಾನಿಕ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಯಾಮಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈ ಜೋಡಿಯು ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳದಿರುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಮರ್ಯಾದಿತವಿಲ್ಲ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಇಲ್ಲವೆ ಅನೇಕ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳಿರಬಹುದು. ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಯಾವದೇ ಘಾತವಿರಬಹುದು. ಯಾವ ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳು (ಮಾನಗಳು) ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಅವೆಲ್ಲವುಗಳಿಗೂ ಸರಿ ಬರುತ್ತವೆಯೋ ಅಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಸಮಮಾನಿಕ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಯಾಮಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಯಾವ ರೀತಿಯನ್ನು ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದವೋ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅನುಕೂಲ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನಾಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನಾಗಲಿ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇದೇ ಭಾಗವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಹತ್ವದ್ದು. ಅದುದರಿಂದ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಈ ರೀತಿಗೆ ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಯೋಗ ಅಂದರೆ ಬೇರೀಜು, ಮತ್ತು ವಿಯೋಗವೆಂದರೆ ವಜಾಬಾಕಿ.

೩.

೨.೯. ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿಯ ಹೊರತು ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಇನ್ನೂ ಒಂದೆರಡು ರೀತಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಾಡುವಾ. ವಿಚಾರದ-ಗೋಸ್ಕರ ಹಿಂದೆ ಪ. ೨.೭ ರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ $y + v = 2x \dots (೧)$ ಮತ್ತು $೧೦y + ೩v = ೧೫ \dots (೨)$ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. (೧)ದರ ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ $v = 2x - y$ ಮತ್ತು v ದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨)ರಲ್ಲಿ v ದ ಬದಲಾಗಿ ಬರೆದರೆ $೧೦y + ೩(2x - y) = ೧೫$.

$$\therefore ೭ಯ = ೫ಠ್ಠಿ ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೯ಠ್ಠಿ.$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad ವ = ೩ಠ್ಠಿ - ೯ಠ್ಠಿ = ೨ಠ್ಠಿ.$$

$$ಯ = ೯ಠ್ಠಿ; \quad ವ = ೨ಠ್ಠಿ.$$

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯುವದು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬದಲಾಗಿ ಹಾಕಿ ಅದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತ ಮಾತ್ರ-ವಿರುವಂಥ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುವದು, ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು, ಮತ್ತು ಅ ಬೆಲೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು, ಹೀಗೆ ಈ ರೀತಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಗೆ ಉತ್ಪಾಪನ ರೀತಿಯೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾಪನವೆಂದರೆ ಒಂದರ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವದನ್ನಾದರೂ ಹಾಕುವದು, ಬದಲಿ ಇಡುವದು.

ಅದರ ಮುಂದಿನ ಜೋಡಿಯನ್ನು $ಯ + ೪ವ = ೧೧ಠ್ಠಿ$ (೧) ಮತ್ತು $೪ಯ + ೭ವ = ೨೧ಠ್ಠಿ$ (೨) ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ (೧)ರ ಮೇಲಿಂದ $ಯ = ೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ವ$ ಮತ್ತು $ಯ$ ದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨) ನೇಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿ

$$೪(೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ವ) + ೭ವ = ೨೧ಠ್ಠಿ$$

$$\therefore ೪೫ಠ್ಠಿ - ೧೬ವ + ೭ವ = ೨೧ಠ್ಠಿ$$

$$\therefore ೯ವ = ೨೩ಠ್ಠಿ ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೨ಠ್ಠಿ.$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad ಯ = ೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ವ = ೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ \times ೨ಠ್ಠಿ = ೧೧ಠ್ಠಿ - ೧೦ಠ್ಠಿ = ೯ಠ್ಠಿ.$$

$$\therefore ಯ = ೯ಠ್ಠಿ, \quad ವ = ೨ಠ್ಠಿ.$$

ಅದರೊಳಗಿನ ಕೊನೆಯ ಜೋಡಿಯನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

$೩ಯ + ೪ವ = ೧೧ಠ್ಠಿ$(೧) ಮತ್ತು $೧೨ಯ + ೫ವ = ೧೯ಠ್ಠಿ$ (೨)
(೧)ನೇಯದರ ಮೇಲಿಂದ $೩ಯ = ೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ವ$ ಇಲ್ಲವೆ $ಯ = ೩(೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ವ)$.
 $ಯ$ ದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨)ನೇಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿ

$$೪(೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ವ) + ೫ವ = ೧೯ಠ್ಠಿ$$

$$\therefore ೪೫ಠ್ಠಿ - ೧೬ವ + ೫ವ = ೧೯ಠ್ಠಿ$$

$$\therefore ೧೧ವ = ೨೬ಠ್ಠಿ ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೨ಠ್ಠಿ.$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad ಯ = ೩(೧೧ಠ್ಠಿ - ೪ವ) = ೩(೧೧ಠ್ಠಿ - ೯ಠ್ಠಿ) = ೩ \times ೧ಠ್ಠಿ = ೯ಠ್ಠಿ.$$

$$ಯ = ೯ಠ್ಠಿ, \quad ವ = ೨ಠ್ಠಿ.$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೭.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಉತ್ಥಾಪನ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ. ತಾಳೆಯನ್ನು ಅವಶ್ಯ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

೧. $೪ಯ + ೯ವ = ೩೦$, ೨. $೫ಯ - ೭ವ = ೩$, ೩. $೧೨ಯ + ೫ರ = ೨೨$,
 $೭ಯ + ೯ವ = ೨೩$. $೪ಯ - ೪ವ = -೨$. $೮ಯ + ೩ರ = ೧೪$.
 ೪. $೯ಪ - ೪ಮ = ೧೬$, ೫. $೯ವ - ೮ಪ = -೬$, ೬. $೧೦ನ + ೧೧ಮ = ೧೬$,
 $೮ಪ + ೫ಮ = ೫೭$. $೭ವ + ೫ಪ = ೨೯$. $೬ನ - ೭ಮ = -೪$.
 ೭. $೩ಲ + ೫ವ = -೧$, ೮. $೨ಯ - ೧೯ರ = -೧೮$, ೯. $೧೧ಪ - ೨ಮ = -೨೯$,
 $೧೩ಲ - ೪ವ = -೩೦$. $೧೦ಯ - ೪ರ = ೧೮$. $೯ಪ + ೭ಮ = -೪೧$.
 ೧೦. $೨೫ಯ - ೧೮ವ = -೧$, ೧೧. $೧೩ಯ + ೬ರ = ೧೪$, ೧೨. $೧೦ರ - ೭ವ = ೧೯$,
 $೫ಯ + ೩ವ = ೨$. $೫ಯ + ೧೮ರ = ೮$. $೫ರ + ೨೧ವ = ೧೩$.

೨.೧೦. ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣದಲ್ಲಿ
 $ಯ + ೯ವ = ೩೦$ (೧) ಮತ್ತು $೧೦ಯ + ೩ವ = ೧೫$ (೨) ಈ ಜೋಡಿಯೊಳಗಿನ
 (೧)ರ ಮೇಲಿಂದ ಹೇಗೆ $ವ = ೩೦ - ೪ಯ$, ಹಾಗೆಯೇ (೨)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ
 $೩ವ = ೧೫ - ೧೦ಯ$, ಅಂದರೆಯೇ $ವ = ೫ - ೨೦ಯ$. ಈಗ $ವ$ ದ ಬೆಲೆಯು
 ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ,

$$೩೦ - ೪ಯ = ೫ - ೨೦ಯ$$

∴ $೧೬ಯ = ೨೫$ ಇಲ್ಲವೆ $ಯ = ೧೫/೧೬$ ಆದುದರಿಂದ $ವ = ೨೯/೧೬$.

$$ಯ = ೧೫/೧೬; ವ = ೨೯/೧೬.$$

ಇದರಂತೆ ಎರಡು ಸಮನಾಂತಿಕ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು
 ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು
 ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈ ವಿಧವಾಗಿ
 ದೊರೆತ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ
 ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆಮೇಲೆ ಮೊದಲನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ
 ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ
 ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿಯ $೩ಯ + ೪ವ = ೧೧೫$(೧) ಮತ್ತು
 $೧೨ಯ + ೫ವ = ೧೯೫$(೨) ಈ ಮೂರನೇ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೪೧

(೧)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ $೪ವ = ೧೧೯ - ೨ಯ$, ಅಂದರೆಯೇ
 $ವ = \frac{೧೧೯ - ೨ಯ}{೪}$, ಮತ್ತು (೨)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ $೫ವ = ೧೧೯ - ೧೨ಯ$,
 ಅಂದರೆಯೇ $ವ = \frac{೧೧೯ - ೧೨ಯ}{೫}$.

ಈಗ ವದ ಬೆಲೆಯು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ.
 ಆದುದರಿಂದ, $\frac{೧೧೯ - ೨ಯ}{೪} = \frac{೧೧೯ - ೧೨ಯ}{೫}$.

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೫(೧೧೯ - ೨ಯ) = ೪(೧೧೯ - ೧೨ಯ)$

$$\therefore ೫೮೫ - ೧೦ಯ = ೪೭೬ - ೪೮ಯ$$

$$\therefore ೨೨ಯ = ೧೦೯ \text{ ಇಲ್ಲವೇ } ಯ = ೫.$$

ಮತ್ತು $ವ = \frac{೧೧೯ - ೨ಯ}{೪} = \frac{೧೧೯ - ೧೦}{೪} = \frac{೧೦೯}{೪} = ೨೭.೨೫$.
 $ಯ = ೫$; $ವ = ೨೭.೨೫$.

ಈ ರೀತಿಗೆ ತುಲನೆ ರೀತಿ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೮.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಿಂದ
 ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

- | | | |
|------------------|----------------|---------------|
| ೧. ೨ಯ-೫ರ=-೨೧, | ೨. ೮ವ+೫ಸ=೧೮, | ೩. ೫ಲ+೨ವ=೧೯, |
| ೨ಯ+೪ರ=೨೬. | ೪ವ-೨ಸ=-೨. | ೭ಲ-೩ವ=೧೫. |
| ೪. ೧೧ಯ-೯ರ=೨೮, | ೫. ೪ಸ-೭ಮ=೧, | ೬. ೧೦ಯ+೭ಸ=-೨, |
| ೧೦ಯ+೩ರ=೫೯. | ೩ಸ+೧೦ಮ=೧೬. | ೭ಯ-೫ಸ=೮. |
| ೭. ೧೨ಲ+ ವ=೬, | ೮. ೯ಸ-೪ಬ=೫, | ೯. ೩ಯ-೨ರ=೨೮, |
| ೬ಲ-೭ವ=-೧೨. | ೧೦ಸ+೨ಬ=೪. | ೧೧ಯ+೫ರ=೭೮. |
| ೧೦. ೨೫ಯ-೧೨ವ=-೧೪, | ೧೧. ೧೪ಸ+೯ಮ=೧೦, | ೧೨. ೨೪ಯ-೫ರ=೫, |
| ೪ಯ-೯ವ=೧೯. | ೧೩ಸ+೩ಮ=೯. | ೧೪ಯ-೧೫ರ=೧. |

೪.

೨.೧೧. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಬಿಡಿಸಿದ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀ-
 ಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು $ಅಯ + ಇರ = ಕ$ ಈ ಸ್ವರೂ-
 ಪದವಿದ್ದವು. ಯಾವಾಗಲೂ ಇಂಥ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಮಗೆ
 ದೊರೆಯುತ್ತವೆಂದಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ ಪ. ೨.೨ ರಲ್ಲಿಯ ಎರಡು

ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಷಯದ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ದೊರೆತ
 $೧೦ಯ + ವ = ೬(ಯ + ವ) + ೬$, ಮತ್ತು $೧೦ವ + ಯ = ೪(ಯ + ವ) + ೯$
 ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇದರೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ
 ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲು ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ತರುವಾಯ
 ಅದನ್ನು $ಅಯ + ಇರ = ಕ$ ಈ ಮಾದರಿಯ ಸಾದಾ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯು-
 ಬೇಕು, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

$$೧೦ಯ + ವ = ೬(ಯ + ವ) + ೬$$

$$\therefore ೧೦ಯ + ವ = ೬ಯ + ೬ವ + ೬$$

$$\therefore ೪ಯ - ೫ವ = ೬ \dots\dots\dots (೧)$$

ಮತ್ತು

$$೧೦ವ + ಯ = ೪(ಯ + ವ) + ೯$$

$$\therefore ೧೦ವ + ಯ = ೪ಯ + ೪ವ + ೯$$

$$\therefore ೬ವ - ೩ಯ = ೯$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $೨ವ - ಯ = ೩ \dots\dots\dots (೨)$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೮ವ - ೪ಯ = ೧೨ \dots\dots\dots (೨ಅ)$

(೧) ಮತ್ತು (೨ಅ) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ, $೩ವ = ೧೮$ ಇಲ್ಲವೆ $ವ = ೬$.

ಮತ್ತು $೨ವ - ಯ = ೩ \dots\dots\dots (೨)$ ಇರುವದರಿಂದ $ಯ = ೯$.

$\therefore ೯೬$ ಇದು ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು.

[ತಾಳಿ: $೬(೯+೬)+೬ = ೬ \times ೧೫ + ೬ = ೯೬$; $೪(೬+೯)+೯ = ೪ \times ೧೫ + ೯ = ೬೯$.]

ಉ. ೨. ಪ. ೨.೩ ರೊಳಗಿನ ಉ. ೪ ನೆಯದರಲ್ಲಿಯು $\frac{ಯ}{೨೫} + \frac{ವ}{೨೦} = ೨೧೫೦$

ಮತ್ತು $\frac{ಯ}{೨೦} + \frac{ವ}{೨೫} = ೨೩೫೦$ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

$$\frac{ಯ}{೨೫} + \frac{ವ}{೨೦} = ೨೧೫೦ \dots\dots\dots (೧)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೪ಯ + ೫ವ = ೨೧೫೦೦೦ \dots\dots (೧ಅ)$

$$\frac{ಯ}{೨೦} + \frac{ವ}{೨೫} = ೨೩೫೦ \dots\dots\dots (೨)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೫ಯ + ೪ವ = ೨೩೫೦೦೦ \dots\dots (೨ಅ)$

(೧ಅ) ವನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೨೦ಯ + ೨೫ವ = ೧೦೭೫೦೦೦ \dots\dots (೧ಆ)$

ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೪೩

(೨೨) ವನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೨೦ಯ+೧೬ವ=೯೪೦೦೦೦....(೨೨)$

(೧೨) ಮತ್ತು (೨೨) ಇವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ,

$$೯ವ=೧೩೫೦೦೦ \text{ ಇಲ್ಲವೆ } ವ=೧೫೦೦೦.$$

(೧೨) ದಲ್ಲಿ $ವ=೧೫೦೦೦$ ಹಾಕಲಾಗಿ, $೪ಯ+೭೫೦೦೦=೨೧೫೦೦೦$

$$\therefore ೪ಯ=೧೪೦೦೦೦ \text{ ಇಲ್ಲವೆ, } ಯ=೩೫೦೦೦.$$

\therefore ರೂ. ೩೫೦೦೦, ರೂ. ೧೫೦೦೦ ಇವೆರಡು ಬೇಕಾದ ರಕಮುಗಳು..

[ತಾಳಿ: ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೪ ದರದಂತೆ ೩೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೧೪೦೦ ರೂ.; ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ದರದಿಂದ ೧೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೭೫೦ ರೂ. ೧೪೦೦ ರೂ. + ೭೫೦ ರೂ. = ೨೧೫೦ ರೂ.; ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ದರದಂತೆ ೩೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೧೭೫೦; ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೪ ದರದಂತೆ ೧೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೬೦೦ ರೂ. ೧೭೫೦ ರೂ. + ೬೦೦ ರೂ. = ೨೩೫೦ ರೂ.]

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ತೆಗೆದ ನಂತರ ನಾವು ೨ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು.

(೧೨) ಮತ್ತು (೨೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ, $೯ಯ+೯ವ=೪೫೦೦೦೦$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು } ೯ \text{ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, } ಯ+ವ=೫೦೦೦೦....(೩)$$

(೨೨) ದೊಳಗಿಂದ (೧೨) ವನ್ನು ಕಳೆದು, $ಯ-ವ=೨೦೦೦೦....(೪)$

(೩) ಮತ್ತು (೪) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ, $೨ಯ=೭೦೦೦೦$ ಇಲ್ಲವೆ
 $ಯ=೩೫೦೦೦.$

(೩) ನೆಯದೊಳಗಿಂದ (೪)ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ, $೨ವ=೩೦೦೦೦$ ಇಲ್ಲವೆ
 $ವ=೧೫೦೦೦.$

ಅಯ+ಇರ=೯ ಮತ್ತು ಇಯ+ಅರ=೧ ಈ ಮಾದರಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಿದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕವು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕವು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೊದಲನೆಯ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಈ ರೀತಿಯ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾವು (೧) ಮತ್ತು (೨) ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿ-

ದಂತೆಯೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ನಮಗೆ ಮೊದಲು ವದ ಲೋಪ
ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಹಾಗಾದರೆ,

$$\begin{aligned} (೧) & \text{ನ್ನು } ೨೦ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, } \frac{೧}{೧೦} \text{ಯ } + \text{ವ } = ೪೩೦೦೦ \dots (೫) \\ \text{ಮತ್ತು } (೨) & \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨೫ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, } \frac{೧}{೨೫} \text{ಯ } + \text{ವ } = ೫೮೭೫೦ \dots (೬) \\ (೬) & \text{ ರ ಒಳಗಿಂದ } (೫) \text{ ನ್ನು ಕಳೆದು, } \frac{೧}{೨೦} \text{ಯ } = ೧೫೭೫೦ \\ \therefore \frac{೧}{೨೦} \text{ಯ } & = ೧೭೫೦ \text{ ಇಲ್ಲವೆ, } \text{ಯ } = ೩೫೦೦೦. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಮತ್ತು } \frac{೧}{೨೦} \text{ಯ } & = ೧೭೫೦ \text{ ಇದ್ದುದರಿಂದ } (೨) \text{ ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ} \\ & ೧೭೫೦ + \frac{೧}{೨೫} \text{ವ } = ೨೩೫೦ \\ \therefore \frac{೧}{೨೫} \text{ವ } & = ೬೦೦ \text{ ಇಲ್ಲವೆ, } \text{ವ } = ೧೫೦೦೦. \end{aligned}$$

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ:

$$\begin{aligned} ೮(೨ಯ-೩) + ೨(೩ರ+೧) & = \frac{೧}{೩}(೪ಯ+ರ+೩) + \frac{೧}{೨}(೭ಯ+೪ರ+೬) \\ & = ೫(೮-ಯ-ರ) - ೩(೨ಯ+೩ರ-೪). \end{aligned}$$

ಈ ಮಾದರಿಯು ಕ=ಖ=ಗ ದಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಕ=ಖ, ಖ=ಗ, ಮತ್ತು ಗ=ಕ, ಹೀಗೆ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಬೇಕು. ನಮಗೆ ಅನುಕೂಲವೆನಿಸುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಮೊದಲು ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವಾ.

$$೮(೨ಯ-೩) + ೨(೩ರ+೧) = \frac{೧}{೩}(೪ಯ+ರ+೩) + \frac{೧}{೨}(೭ಯ+೪ರ+೬)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೪೮(೨ಯ-೩) + ೧೨(೩ರ+೧) = ೨(೪ಯ+ರ+೩) + ೩(೭ಯ+೪ರ+೬)$$

$$\therefore ೯೬ಯ-೧೪೪+೩೬ರ+೧೨ = ೮ಯ+೨ರ+೬+೨೧ಯ+೧೨ರ+೧೮$$

$$\therefore ೯೬ಯ+೩೬ರ-೧೩೨ = ೨೯ಯ+೧೪ರ+೨೪$$

$$\therefore ೬೭ಯ+೨೨ರ = ೧೫೬ \dots \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೮(೨ಯ-೩) + ೨(೩ರ+೧) = ೫(೮-ಯ-ರ) - ೩(೨ಯ+೩ರ-೪)$$

$$\therefore ೧೬ಯ-೨೪+೬ರ+೨ = ೪೦-೫ಯ-೫ರ-೬ಯ-೯ರ+೧೨$$

$$\therefore ೧೬ಯ+೬ರ-೨೨ = -೧೧ಯ-೧೪ರ+೫೨$$

$$\therefore ೨೭ಯ+೨೦ರ = ೭೪ \dots \dots \dots (೨)$$

(೧)ನೆಯದನ್ನು ೧೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೬೭೦ಯ+೨೦೦ರ= ೧೫೬೦.....(೧೮)

(೨)ನೆಯದನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೨೯೭ಯ+೨೦೦ರ= ೮೧೪.....(೨೨)

(೧೮)ದೊಳಗಿಂದ (೨೨)ವನ್ನು ಕಳೆದು, ೩೭೩ಯ = ೭೪೬ ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೨.

(೨)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ, ೫೪ + ೨೦೦ರ = ೭೪ ಅಂದರೆ, ೨೦೦ರ = ೨೦;

ಅಂದರೆ, ರ = ೧. ∴ ಯ = ೨; ರ = ೧.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೯.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

$$೧. \frac{ಯ}{೨} + \frac{ರ}{೩} = ೪, \quad ೨. \frac{ಯ}{೬} - \frac{ರ}{೪} = ೧, \quad ೩. \frac{ಯ}{೮} + \frac{ವ}{೧೦} = ೪,$$

$$\frac{ಯ}{೪} + \frac{ರ}{೨} = -೨. \quad \frac{ಯ}{೩} - \frac{ರ}{೨} = ೨. \quad \frac{ಯ}{೧೬} - \frac{ವ}{೫} = -೩.$$

$$೪. \frac{ಯ}{೪} - \frac{ಲ}{೮} = ೨\frac{೩}{೪}, \quad ೫. \frac{೫ಯ}{೩} + \frac{೮ಲ}{೯} = ೧೭\frac{೨}{೩}, \quad ೬. ಯ = \frac{ರ-೮}{೩},$$

$$\frac{ಯ}{೬} - \frac{ಲ}{೩} = \frac{೨}{೩}. \quad \frac{೩ಯ}{೪} - \frac{೪ಲ}{೩} = ೨\frac{೩}{೪}. \quad ರ = \frac{೪ಯ+೩}{೯}.$$

$$೭. \frac{೪ಪ-೩}{೫} + ಮ = ೭, \quad ೮. \frac{೪ಯ}{೫} - \frac{೯ರ}{೧೬} = -೨,$$

$$೩ಪ - \frac{೨ಮ+೧೧}{೩} = ೧೬. \quad \frac{೩ಯ}{೨} + \frac{೫ರ}{೮} = ೧೨\frac{೨}{೨}.$$

$$೯. \frac{೨ಪ}{೬} + \frac{೫ಮ}{೯} = ೨\frac{೩}{೪}, \quad ೧೦. \cdot ೫ನ + \cdot ೮ಮ = ೨ \cdot ೧,$$

$$೩ಪ - ೨ಮ = ೦. \quad \cdot ೩ನ + \cdot ೭ಮ = ೧ \cdot ೭.$$

$$೧೧. \cdot ೬ದ - \cdot ೪ನ = \cdot ೨, \quad ೧೨. \cdot ೨೫ಯ + \cdot ೫ರ = ೪,$$

$$೧೩. \cdot ೦೮ರ - \cdot ೨೨ವ = - \cdot ೩, \quad ೧೪. ೯ಪ - \cdot ೦೯ಮ = ೩ \cdot ೨೪,$$

$$೪ರ - ೭ \cdot ೨ವ = ೪. \quad \cdot ೭ಪ + \cdot ೧೪ಮ = \cdot ೮೪.$$

೧೫. ಉ. ೩೮+೧.೯ವ = ೧.೮೫, ೧೬. $\frac{೨ನ-೫ಮು}{೩} + \frac{೩ನ+೨ಮ}{೭} = ೩.$

೨. ೧೮+೧.೧ವ = .೫೩. $\frac{ನ-೨ಮ}{೫} - \frac{೮ಮ-೩ನ}{೨} = ೨೫.$

೧೭. $\frac{೪ಯ-೮}{೩} - \frac{೨ರ-೩ಯ}{೨} = \frac{೫೫}{೩},$ ೧೮. $\frac{೫ಪ+೨ಮ}{೩} + \frac{ಮ-೫}{೪} = ೬,$

$\frac{೮ಯ-೯ರ}{೬} + \frac{೫ರ-೨ಯ}{೪} = \frac{೧೧}{೨}.$ $\frac{೩ಮ-೨ಪ}{೬} + \frac{೪ಪ+ಮ}{೯} = \frac{೧೯}{೬}.$

೧೯. $೪ಯ+೩(೫ರ-೨ಯ) = ೭ಯ+೬(೩ರ-೫),$
 $೫ರ-೨(೩ಯ-೪ರ) = ೫(೩ರ-೨ಯ).$

೨೦. $೫ದ-೨(೩ನ-೫) = ೭ನ+೧+೩(೫ದ-೪ನ-೧),$
 $೨ದ+೭ನ+೪ = ೫(೩ದ+ನ-೧).$

೨೧. $೩ಪ+೨ಮ-೭ = ೫(೨ಪ-ಮ),$
 $೪(೨ಪ-೫ಮ+೧೭) = ೧೮ಮ-೧೪ಪ-೨(೩ಪ+ಮ).$

೨೨. $\frac{ಯ}{೪}+೩(೨ಯ-೮+೩) = \frac{೫ರ}{೬}+೨(೫ಯ-೨ರ+೪),$

$೧೫ಯ - ೪ರ + ೩ = ೪(ಯ + \frac{೨ರ}{೧೫} + ೩).$

೨.೧೨. ಉ. ೧. ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ೯ ಇರುತ್ತದೆ. ಅನೇ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತಿರುವುಮುರುವ ಬರೆದು ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ನೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೯೮ರಿಂದ ಸಣ್ಣದು ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಶತಂ ಹಾಗೂ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುವದೋ ಅದರ ೨೨ ಪಟ್ಟು ನೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಯ ಮತ್ತು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ರ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ೯-ಯ-ರ ಇರುವದು; ಆದುದರಿಂದ ಮೂಲ

ಸಂಖ್ಯೆಯು = ೧೦೦ ಯ + ೧೦ ರ + (೯ - ಯ - ರ), ಅಂಕಗಳನ್ನು ತಿರುವಿ ಬರೆದು ನಿಷ್ಪನ್ನವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು = ೧೦೦ (೯ - ಯ - ರ) + ೧೦ ರ + ಯ, ಮತ್ತು ಶತಂ ಮತ್ತು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತಿರುವಮುರವ ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು = ೧೦೦ ರ + ೧೦ ಯ + ೯ - ಯ - ರ.

$$\therefore ೧೦೦ಯ + ೧೦ರ + (೯ - ಯ - ರ) + ೧೯೮ = ೧೦೦(೯ - ಯ - ರ) + ೧೦ರ + ಯ$$

$$\therefore ೯೯ಯ - ೯೯(೯ - ಯ - ರ) + ೧೯೮ = ೦$$

$$೯೯ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಯ - (೯ - ಯ - ರ) + ೨ = ೦$$

$$\therefore ೨ಯ + ರ = ೭ \quad \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೧೦೦ಯ + ೧೦ರ + (೯ - ಯ - ರ) = \frac{೨}{೩}(೧೦೦ರ + ೧೦ಯ + ೯ - ಯ - ರ)$$

$$\therefore ೯೯ಯ + ೯ರ + ೯ = \frac{೨}{೩}(೯೯ರ + ೯ಯ + ೯)$$

$$\therefore ೩(೩೩ಯ + ೩ರ + ೩) = \frac{೨}{೩} \times ೯(೧೧ರ + ಯ + ೧)$$

$$\therefore ೩೩ಯ + ೩ರ + ೩ = ೭(೧೧ರ + ಯ + ೧)$$

$$\therefore ೩೩ಯ + ೩ರ + ೩ = ೭೭ರ + ೭ಯ + ೭$$

$$\therefore ೨೩ಯ - ೭೪ರ = ೪$$

$$\therefore ೧೩ಯ - ೩೭ರ = ೨. \quad \dots \quad \dots \quad \dots (೨)$$

$$(೧) \text{ನ್ನು } ೩೭ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೭೪ಯ + ೩೭ರ = ೨೫೯ \quad \dots (೧ಅ)$$

$$(೧ಅ) \text{ ಮತ್ತು } (೨) \text{ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ } ೮೭ಯ = ೨೬೧ \text{ ಇಲ್ಲವೆ } ಯ = ೩.$$

$$\text{ಮತ್ತು } \therefore ೨ಯ + ರ = ೭$$

$$\therefore ರ = ೧.$$

$$\therefore ೩೧೫ \text{ ಇದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು.}$$

$$[\text{ತಾಳೆ: } ೩೧೫ + ೧೯೮ = ೫೧೩. \quad \frac{೨}{೩} \times ೧೩೫ = ೭ \times ೪೫ = ೩೧೫.]$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೫೮ ಇದ್ದು, ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತ-ರವು ೮ ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೨. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೪೬ ಇದ್ದು, ಮೊದಲನೆಯದರ ಮೂರುಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ೫ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೭೪ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೩. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೨೦ ಇದ್ದು, ಮೊದಲನೆಯದರ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟನ್ನು ಎರಡನೆಯದರ ೯ ಪಟ್ಟಿನೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೧೫ ಬರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೪. ಇಂದು ಇಬ್ಬರು ಸಹೋದರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜು ೫೧ ವರ್ಷ-ಗಳಿದ್ದು ೯ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಹಿರಿಯವನ ವಯಸ್ಸು ಕಿರಿಯವನ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೩ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೫. ಒಂದು ಕ್ಲಬ್ಬಿನ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ ನಡೆದ ಹೆಸರಾದ ಆಟಗಾರರ ಕ್ರಿಕೆಟಿನ ಪಂದ್ಯಾಟದಲ್ಲಿ ಸಭಾಸದರಿಗೆ ಪ್ರವೇಶ ಫೀಯು ೩ ರೂ. ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಜನರಿಗಾಗಿ ೮ರೂ. ಇತ್ತು. ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೩೮೪ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೯೬೨೨ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಲ್ಲಿ ಸಭಾಸದರು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಮತ್ತು ಬೇರೆಯವರು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಒಬ್ಬ ವರ್ತಕನ ಹತ್ತರ ೧೨ ಡರೂನ ಚಹದ ರತ್ತಲಿನ ಡಬ್ಬಿಗಳಿದ್ದವು. ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೆಲವನ್ನು ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೨|| ರೂ., ಈ ದರದಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಮುಂದೆ ದರವು ಏರಿದ ಮೂಲಕ ಉಳಿದವು-ಗಳನ್ನು ೨ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಈ ದರದಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಒಟ್ಟು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ೩೬೨ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಅವನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನು?

೭. ಒಂದೇ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಸುಬ್ಬರಾಯರು ೮ ಸೇ. ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ೫ ಸೇ. ತುಪ್ಪವನ್ನು ೭೯ ರೂ. ಗೆ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ-ರಾಯರು ೫ ಸೇ. ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ೮ ಸೇ. ತುಪ್ಪವನ್ನು ೮೩|| ರೂ. ಗೆ ಕೊಂಡರು. ಆದರೆ ಬೆಣ್ಣೆ ಮತ್ತು ತುಪ್ಪ ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸೇರಿನ ದರವೇನಿತ್ತು?

೮. ಕಮಲೆಯು ೧೨ ಡರೂನ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ೨ ಡರೂನ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ೩ ರೂ. ೯ ಆ. ಗೆ ಮತ್ತು ಸರಲೆಯು ೨೨ ಡರೂನ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ೧೨ ಡರೂನ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣು-೭ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಗೆ ಕೊಂಡರು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ದರವೇನು?

೯. ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ಒಂದು ಸಕ್ಕರೆಯ ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ೬%ದ ಶೇವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಲವನ್ನು ೩%ದ ಸರಕಾರಿ ರೋಖೆಗಳಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೨೦೦೦೦ ರೂ. ಇಟ್ಟರೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪನ್ನವು ೧೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೇವಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೦. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರು-ಪಟ್ಟು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ೪ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೧೬ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇತ್ತು. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸಿನ ೫ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೨೦ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಇಂದಿನ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೧೧. ಒಂದು ಡೋಣಿಯು ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದಗುಂಟ ೩ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ೧೫ ಮೈಲು ಹೋಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೇ ಅಂತರವನ್ನು ೫ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಿಂತ ನೀರಿನೊಳಗೆ ಡೋಣಿಯ ವೇಗವನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೭ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ೨೭ ರಿಂದ ಸಣ್ಣದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೧೩. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ದಿನಾಲು ೧೦ ಆ. ಗೆ ಸೇರು, ಈ ದರದಿಂದ ಕೆಲವನ್ನು ಮತ್ತು ೧೨ ಆ. ಗೆ ಸೇರು ಈ ದರದಿಂದ ಕೆಲವನ್ನು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೭೫ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೧೩ ಆ. ಗೆ ಸೇರಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ೯ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಎಷ್ಟು ಹಾಲನ್ನು ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ?

೧೪. ೬ ರತ್ನಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೪ ರತ್ನಲು ಕಾಫಿಯನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡರೆ ೨೫ ರೂ. ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ೪ ರತ್ನಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೬ ರತ್ನಲು ಕಾಫಿಯನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡರೆ ೨೯ ರೂ. ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ನಲಿನ ದರವೆಷ್ಟು?

೧೫. ಇಂದಿಗೆ ಅರವಿಂದನ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೩ ವರ್ಷ ಹೆಚ್ಚು ಅವನ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಇರುತ್ತದೆ. ೫ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಅವನ ವಯಸ್ಸಿನ ೩ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೧ ವರ್ಷ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೧೬. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ೨||| ರೂ. ಗೆ ರತ್ನಲು ಈ ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ೧೪ ಆ. ಗೆ ರತ್ನಲು ಈ ದರದ ಕೆಲವನ್ನು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೦೦ ರತ್ನಲು ಚಹವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿ, ಆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೩ ರೂ. ಗೆ ರತ್ನಲಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ೧೮೨ ರೂ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣದ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಎಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಅವನು ಕೊಂಡಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೭. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಾಲು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ನೀರು, ಹೀಗೆ ೧೫ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಾಲು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ನೀರು ಹೀಗೆ ೨೫ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಪಾತ್ರೆಗಳೊಳಗಿನ ಮಿಶ್ರಣಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಶುದ್ಧ ಹಾಲು ಮತ್ತು ನೀರು ಇವು ೫:೩ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೫ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆ ಮಿಶ್ರಣಗಳನ್ನು ಒಂದೆಡೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಶುದ್ಧ ಹಾಲು ಮತ್ತು ನೀರು ಇವು ೧೯:೧೧ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಶುದ್ಧ ಹಾಲು ಎಷ್ಟು ಮತ್ತು ನೀರು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೮. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨೭ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವದು. ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ೭ ಇದ್ದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೧೯. ೪ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಇದ್ದ ರಾಮನ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ೬ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಗೋವಿಂದನ ವಯಸ್ಸು ಆಗುವದು, ಮತ್ತು ೩ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಇದ್ದ ಗೋವಿಂದನ ವಯಸ್ಸಿನ ೩ ಪಟ್ಟು ೧೪ ವರ್ಷಗಳ

ತರುವಾಯ ರಾಮನದು ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೨೦. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ೧೮ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಅಂಕಗಳು. ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಒಂದೂವರೆ ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದರೆ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕುಪಟ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೨೧. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨ ರೂ. ದಿನಗೂಲಿಯಂತೆ ಕೆಲವು ಗಂಡಸರು, ಮತ್ತು ೧೧ ರೂ. ದಿನಗೂಲಿಯಂತೆ ಕೆಲವು ಹೆಂಗಸರು, ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಒಟ್ಟು ದಿನಗೂಲಿಯು ೭೨ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಹೆಂಗಸರಷ್ಟು ಗಂಡಸರು, ಮತ್ತು ಗಂಡಸರಷ್ಟು ಹೆಂಗಸರು ಇದ್ದರೆ, ಒಟ್ಟು ದಿನಗೂಲಿಯು ೬೮ ರೂ. ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ, ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಹೆಂಗಸರು ಇದ್ದರು?

೨೨. ಒಂದು ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಗಂಡಸರು, ಹೆಂಗಸರು ಮತ್ತು ಹುಡುಗರು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೦೦ ಜನರು ಕೆಲಸದ ಮೇಲಿದ್ದು, ಅವರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೪೦ ರೂ. ೩೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೨೦ ರೂ. ಪಗಾರವನ್ನು ಮತ್ತು ೩೦ ರೂ. ೨೫ ರೂ. ೧೫ ರೂ. ದಂತೆ ತುಟ್ಟಿ-ಭತ್ತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಪಗಾರದ ಒಟ್ಟು ರಕಮು ೩೫೬೦ ರೂ. ಮತ್ತು ತುಟ್ಟಿಭತ್ತಿಯು ೨೭೪೦ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಗಂಡಸರ, ಹೆಂಗಸರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೩. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ೬ ಪಟ್ಟು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೪ ಪಟ್ಟು-ಗಿಂತ ೮ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದು, ಮೊದಲನೆಯದರ ೯ ಎರಡನೆಯದರ ೧೩ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವವು?

೨೪. ಒಂದು ರಕಮು ೪ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಬೇರೊಂದು ೫ ದರದಿಂದ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ರಕಮುಗಳನ್ನು ೧ ವರ್ಷದ ವರೆಗೆ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದೆ. ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಆ ಎರಡೂ ರಕಮುಗಳು ತಿರುಗಿ ಬಂದ ಮೇಲೆ ಆ ಎಲ್ಲ ಹಣವನ್ನು

ಬಡ್ಡಿ ಸಹಿತವಾಗಿ ಮತ್ತೆ ೫ ದರದಂತೆ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿಯು ೧೯೬೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಬಡ್ಡಿ ೨೦೯೮ ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೫. ೩|| ದರದಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ, ೩ ದರದಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧ ಲಕ್ಷ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟರೆ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ತಕ್ಕೊಳ್ಳದೆ ಅದನ್ನು ಮೂಲ ಅಸಲಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ೧೦೬೫೦೩ ರೂ. ತಿರುಗಿ ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೬. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೧|| ರೂ. ಬೆಲೆಯ ಕೆಲವನ್ನೂ, ೨ ರೂ. ಬೆಲೆಯ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಹೀಗೆ ದೀಪಾವಳಿಯ ವಿಶೇಷ ಸಂಚಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ೧೫೬ ರೂ. ದೊರೆತವು. ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೮. ಮತ್ತು ೨೮. ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭವನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡಿದ್ದರೆ, ಒಟ್ಟು ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ೧೬೫ ರೂ. ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಎಷ್ಟು ಸಂಚಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೭. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಾಕೃತಿಯ ನೆಲದ ತುಂಡಿನ ಬದಿಗಳು ೨೨ಯ + ೪ರ ಫೂ., ೬ಯ - ೧೫ರ ಫೂ., ಮತ್ತು ೬ರ + ೨೫ ಫೂ. ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ೬ ಅ.ಗೆ ಫೂಟಿನಂತೆ ಅದಕ್ಕೆ ಬೇಲಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಬರುವದು?

೨೮. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ನೆಲದ ತುಂಡಿನ ಬದಿಗಳ ಅಳತೆಗಳು ವಾರುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೬ಯ + ೧೨ವ - ೩, ೧೦ಯ + ೧೦ವ + ೧, ೯ಯ + ೧೩ವ + ೧ ಮತ್ತು ೨೮ಯ - ೪ವ + ೫ ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ೬ ರೂ.ಗೆ ಚೌ. ವಾರು, ಈ ದರದಂತೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಆಗುವದು?

೨೯. ರಾಮರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೨ ಪಟ್ಟು ಕೃಷ್ಣರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೩ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು, ಕೃಷ್ಣರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ

೭ ಪಟ್ಟು ರಾಮರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೪ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೧೫ ವರ್ಷಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೩೦. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟನ್ನು ಎರಡನೆಯದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೫ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೨ ಬರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ೭ ಪಟ್ಟನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೫ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೮ ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೩೧. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಭುಜಗಳ ಎದುರಿನ ಕೋನಗಳು (೩ಯ+೮ರ)° ಮತ್ತು (೧೧ರ-೪ಯ)° ಇದ್ದು, ಮೂರನೆಯ ಕೋನವು (೧೭ರ-೨೩ಯ)° ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರಿ.

೩೨. ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೩೯ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೧ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೮೧ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೧೨ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೩೩. ೩೨ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಕುಮುದೆಯ ವಯಸ್ಸು, ಇಂದು ಅವಳ ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ಅವಳ ತಂದೆಯವರ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರದಷ್ಟು ಆಗುವದು. ೪ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅವಳ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಅವಳ ವಯಸ್ಸಿನ ೫ ಪಟ್ಟು ಇತ್ತು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೩೪. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೧೨ ಭಾಗ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೨೧ನೇ ಭಾಗ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೨೧ ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವಿರುತ್ತದೆ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೨೧ನೇ ಭಾಗವನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೧೨ನೇ ಭಾಗದೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೧ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂಚನೆಗಳು

೨-೧೩. (೧) ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಯಾವ ಅನ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ನಿಶ್ಚಯಿಸಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಆ ಅನ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಿ ಎರಡನೆಯ ಅನ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

(೨) ಒಂದು ಅನ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವು ತಿಳಿದ ನಂತರ ಅದನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಎರಡನೇ ಅನ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಉತ್ಥಾಪನ ಇಲ್ಲವೆ ತುಲನೆ ಈ ರೀತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ಅನ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಅನ್ಯಕ್ತದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವ ಯಾವದಾದರೂ ಅನುಸಾಧಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

(೩) ತಾಳೆಯನ್ನು ನೋಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರದೇ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ ಯಾವದು ಅಥವಾ ಯಾವದರಿಂದ ದೊರೆತ ಸಮೀಕರಣವು ಉತ್ಥಾಪನಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆಯೋ ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು, ಆದರೆ ಮೂಲ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಒಳ್ಳೆಯದು.

(೪) ಮುಖ್ಯ ಮುಖ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಂಕಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಬೇಕು, ಮತ್ತು ರೀತಿಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆ ಅಂಕಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

೨-೧೪. ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದರಲ್ಲಿ ಯೋಗವಿಯೋಗ, ಉತ್ಥಾಪನ ಮತ್ತು ತುಲನೆ, ಹೀಗೆ ಮೂರು ರೀತಿಗಳ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ತರದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಇನ್ನೂ ಒಂದೆರಡು ರೀತಿಗಳಿವೆ. ಅವು ಮುಂದೆ ಯೋಗ್ಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲ್ಪಡುವವು.

{ ಸ್ಥಳ ಸಂಕೋಚದ ಮೂಲಕ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ತಾಳೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ತಾಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡುವದು ಇಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವದು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು
ಬದಲಿಸುವದು

೩.೧. ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳ ಪರಿಚಯವು ನಮಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕು, ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಅನ್ಯೋನ್ಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಬೇಕು, ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಇಂದು ನಾವು ಆ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಉ) ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು (ಅ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ನಾವು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು. ಉದ್ದಳತೆಯು ೫೫ ಫೂ. ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೨೦ ಫೂ. ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೫೦೦ ಚೌ. ಫೂ., ಅಥವಾ ಉದ್ದಳತೆಯು ೩೦ ವಾರು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೨೨ ವಾರು ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೬೬೦ ಚೌ. ವಾ. ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ, ಉ ಮತ್ತು ಅ ಈ ಪರಸ್ಪರಾವಲಂಬಿ ಮೂರು ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ - ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಕ್ಷದ - ಉಳಿದ ಸಂಗತಿಗಳೊಡನೆ ಇದ್ದ ಸಂಬಂಧವು ಯಾವ ತರದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿದೆ. ಪರಸ್ಪರಾವಲಂಬಿ ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಘಟಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಳಿದ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃ ಎಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ಇದು ಕರ್ತೃವು ಇರುತ್ತದೆ.

೩.೨. ಈಗ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರವು ಯೋಗ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಅಗಲಳತೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಉದ್ದಳತೆ, ಅಥವಾ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಅಗಲಳತೆ

ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ನಮಗೆ ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವು ಕ್ಷ ಬೇಡಾಗಿದ್ದು ಉ ಅಥವಾ ಅ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಏನು ಮಾಡಬೇಕು? ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅಥವಾ ರಾಶಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಗಣಿತ-ಶಾಸ್ತ್ರದೊಳಗಿನ ಬಹಳ ಮಹತ್ವದ ತತ್ವದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$\text{ಕ್ಷ} = \text{ಉಅ} \quad \dots \quad (೧)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\text{ಕ್ಷ}}{\text{ಅ}} = \text{ಉ}, \text{ಅಂದರೆಯೇ ಉ} = \frac{\text{ಕ್ಷ}}{\text{ಅ}} \quad \dots \quad (೨)$$

ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಉ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\text{ಕ್ಷ}}{\text{ಉ}} = \text{ಅ} \text{ ಅಂದರೆಯೇ } \text{ಅ} = \frac{\text{ಕ್ಷ}}{\text{ಉ}} \quad \dots \quad (೩)$$

(೨) ರಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವು ಉ ಇರುತ್ತದೆ. (೩) ರಲ್ಲಿ ಅ ಇರುತ್ತದೆ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೬೬೦ ಚೌ. ವಾರು ಇದ್ದು, ಅಗಲಳತೆಯು ೨೨ ವಾರುಗಳಿದ್ದರೆ, $\text{ಉ} = \frac{೬೬೦}{೨೨} = ೩೦$ (ಉದ್ದಳತೆಯು ೩೦ ವಾರು) ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೫೦೦ ಚೌ. ಫೂಟುಗಳಿದ್ದು ಉದ್ದಳತೆಯು ೨೫ ಫೂಟುಗಳಿದ್ದರೆ $\text{ಅ} = \frac{೫೦೦}{೨೫} = ೨೦$ (ಅಗಲಳತೆಯು ೨೦ ಫೂ.).

೩.೩. ಅಸಲು (ಅ), ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು (ದ), ಕಾಲ (ಕ) ಮತ್ತು ಬಡ್ಡಿಯು

(ಬ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ $\text{ಬ} = \frac{\text{ಅದಕ}}{\text{ಗಂ೦}}$ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಸಲು ೫೦೦ ರೂ., ಬಡ್ಡಿಯ ದರ ೬ ಮತ್ತು ಅವಧಿಯು ೩ ವರ್ಷಗಳು ಇದ್ದರೆ ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಬಡ್ಡಿಯು $= \frac{೫೦೦ \times ೬ \times ೩}{೧೦೦}$ ರೂ.

$= ೯೦$ ರೂ. ಹೀಗೆ ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬ ಇದು ಕರ್ತೃ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಬ ಈ ಕರ್ತೃವು ಬೇಡಾಗಿದ್ದು ಅ, ದ, ಕ

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವದು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಬದಲಿಸುವದು ೫೭

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಕರ್ತೃವು ಬೇಕಾಗಿದೆ, ಅಂದರೆ ನಮಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂರು ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೂ ಎರಡು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದು ಮೂರನೆಯದು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$ಬ = \frac{\text{ಅದಕ}}{೧೦೦} \dots \dots \dots (೧),$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೧೦೦ಬ = ಅದಕ, ಅಂದರೆಯೇ ಅದಕ = ೧೦೦ಬ.

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ದಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ } ಅ = \frac{೧೦೦ಬ}{\text{ದಕ}} \dots \dots (೨),$$

$$\text{ಅಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, } ದ = \frac{೧೦೦ಬ}{\text{ಅಕ}} \dots \dots (೩),$$

$$\text{ಮತ್ತು ಅದ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, } ಕ = \frac{೧೦೦ಬ}{\text{ಅದ}} \dots \dots (೪).$$

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅಸಲನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ (೨) ರ, ದರವು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ (೩) ರ ಮತ್ತು ಅವಧಿಯು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ (೪) ರ ಉಪಯೋಗವು ಆಗುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನೂರಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪ ದರದಿಂದ ೮೦೦ ರೂ. ರಕಮಿನ

$$\text{ಮೇಲೆ ೯೬ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ, } ಕ = \frac{೧೦೦ \times ೯೬}{೮೦೦ \times ೪} = ೩ \text{ (ಮುದ್ದತು ೩ ವರ್ಷಗಳು).}$$

ಈಗ ರಾಸಿನ ಸೂತ್ರವು $ರ = ಅ + \frac{\text{ಅದಕ}}{೧೦೦}$, ಇದರಲ್ಲಿ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $ಅ + \frac{\text{ಅಕದ}}{೧೦೦} = ರ$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೧೦೦ಅ + ಅದಕ = ೧೦೦ ರ

$$\therefore ಅ (೧೦೦ + \text{ದಕ}) = ೧೦೦ ರ.$$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು } (೧೦೦ + \text{ದಕ}) \text{ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, } ಅ = \frac{೧೦೦ರ}{೧೦೦ + \text{ದಕ}} \dots (೨)$$

$$\text{ಅದರಂತೆಯೇ} \therefore \text{ಅ} + \frac{\text{ಅದಕ}}{1000} = \text{ರ}$$

$$\therefore \frac{\text{ಅದಕ}}{1000} = \text{ರ} - \text{ಅ} \quad (\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ})$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು 1000 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಅದಕ=1000 (ರ - ಅ)

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಅಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ದ} = \frac{1000(\text{ರ}-\text{ಅ})}{\text{ಅಕ}} \quad \dots (2),$$

$$\text{ಮತ್ತು ಅದ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ,} \quad \text{ಕ} = \frac{1000(\text{ರ}-\text{ಅ})}{\text{ಅದ}} \quad \dots (3).$$

೬೦೦ ರೂ. ಅಸಲಿನ ೪ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ರಾಸು ೭೨೦ ರೂ. ಆಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಎಷ್ಟು? ಹೀಗೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದ್ದರೆ $\text{ದ} = \frac{1000(200 - 600)}{600 \times 4}$

$$1000 \times 100$$

$$600 \times 4$$

೩.೪. ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳದ ವಿಶಿಷ್ಟ ವೇಳೆಯ ಫರನ್ ಹೀಟು ತಪಮಾಪಕದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ತಪಮಾನಾಂಕ ಮತ್ತು ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ್ ತಪಮಾಪಕದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ತಪಮಾನಾಂಕ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $\text{ಫ} = 32 + \frac{5}{9} \text{ಸೆಂ.}$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಫ ಇದು ಕರ್ತೃ ಇದೆ. ಅದನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಸೆಂ. ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನು ಮಾಡ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ,

$$32 + \frac{5}{9} \text{ಸೆಂ.} = \text{ಫ ಇದ್ದುದರಿಂದ}$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ } \frac{5}{9} \text{ಸೆಂ.} = \text{ಫ} - 32$$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು } \frac{9}{5} \text{ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ,} \quad \text{ಸೆಂ.} = \frac{9}{5} (\text{ಫ} - 32).$$

ಯಾವದೋ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ತಪಮಾನವು ೯೫° ಫ ಇದ್ದಾಗ ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ್ ತಪಮಾಪಕವು $\frac{9}{5} (95 - 32)$, ಅಂದರೆ $\frac{9}{5} (63)$, ಅಂದರೆ ೧೧೦° ತಪಮಾನವನ್ನು ತೋರಿಸುವದು.

೩.೫. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ) ಪರಿಘವು (ಪ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $\text{ಪ} = 2\pi \text{ತ}$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಪ ಇದು ಕರ್ತೃವಿದೆ.

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಬದಲಿಸುವುದು ಇ
ಅದನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ತ ಈ ಕರ್ತೃವು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, π ತ=ಪ, ಇದ್ದುದರಿಂದ
ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು π ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $ತ = \frac{ಪ}{\pi}$.

[π ಇದು ಗ್ರೀಕ ವರ್ಣಮಾಲೆಯೊಳಗಿನ ಒಂದು ಅಕ್ಷರವು.
ಪರಿಮಿತಿ ಈ ಶಬ್ದದ ಸಲುವಾಗಿ ಇರುವ ಗ್ರೀಕ ಪ್ರತಿಶಬ್ದದ ಅದು
ಮೊದಲಿನ ಅಕ್ಷರವಿರುತ್ತದೆ. ಯಾವದೇ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘವು ಮತ್ತು
ಅದರ ವ್ಯಾಸವು ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ೩.೧೪೧೫೯೨೬....ಇರುತ್ತದೆ.
ಈ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ತೋರಿಸುವದರ ಸಲುವಾಗಿ ಅದರ ಬದಲಾಗಿ π ಈ
ಅಕ್ಷರವು ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣವಾಗಿ
ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೨೨}{೭}$, ೩.೧೪, ೩.೧೪೧೬ ಅಥವಾ
೩.೧೪೧೫ ಎಂದು ಗಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅದು ಎಷ್ಟು ಗಣಿಸಲ್ಪಡತಕ್ಕ-
ದ್ದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಉತ್ತರವು ಎಷ್ಟು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಬೇಕೋ ಅದರ ಮೇಲೆ
ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. π ದ ಉಚ್ಚಾರವು ಸಾಯ್ಸ್.]

ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಕೆರೆಯ ಪರಿಘವು ೧೫೪ ಪೂ. ಇದ್ದರೆ,

$$ತ = \frac{೧೫೪}{೨ \times \frac{೨೨}{೭}} = \frac{೧೫೪ \times ೭}{೨ \times ೨೨} = ೨೪೨ \text{ (ತ್ರಿಜ್ಯ, ೨೪೨ ಪೂ. } \therefore \text{ ವ್ಯಾಸವು ೪೯ ಪೂ.)}$$

ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ) ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧ-
ವನ್ನು ಪ= π ತ^೨ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ತ ಈ ಕರ್ತೃ
ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, π ತ^೨=ಪ ಇದ್ದುದರಿಂದ

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು } \pi \text{ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, } ತ = \frac{\sqrt{ಪ}}{\pi}.$$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದು } ತ = \sqrt{\frac{ಪ}{\pi}}.$$

ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು
೧೫೪ ಚೌ. ಪೂ. ಇದ್ದರೆ,

$$ತ = \sqrt{\frac{೧೫೪}{\frac{೨೨}{೭}}} = \sqrt{\frac{೧೫೪ \times ೭}{೨೨}} = \sqrt{೨ \times ೭} = ೩.೭. \text{ (ತ್ರಿಜ್ಯವು = ೩.೭ ಪೂ.)}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

(ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ π ದ ಸಂಬಂಧವು ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಅಲ್ಲಿ ಅದರ ಬೆಲೆ $\frac{22}{7}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯತಕ್ಕದ್ದು.)

೧. (೧) ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳ (ಪ, ಬ) ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬಾಂತರವು (ಲ) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ಬರೆದು ಸಮಾಂತರ ಬದಿಗಳು ೮ ಇಂ. ಮತ್ತು ೧೦ ಇಂ. ಇರುವಂಥ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬಾಂತರವು ೭ ಇಂ. ಇರುವಂಥ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (೨) ಲ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರದ ಹೊಸ ರೂಪವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ೩೬ ಚೌ. ಇಂ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳು ೫ ಇಂ. ಮತ್ತು ೭ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಎಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. (೧) ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಅದರ ಎತ್ತರ (ಎ) ಮತ್ತು ತಳ (ತ) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ತಳವು ೧೫ ಇಂ. ಇದ್ದು ಎತ್ತರವು ೮ ಇಂ. ಇರುವಂಥ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (೨) ತ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಹೊಸ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೫ ಇಂ. ಇದ್ದು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೪೦ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ತಳದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. (೧) ಒಂದು ಘನದ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಮತ್ತು ಅದರ ಭುಜಗಳ (ಬ) ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೨) ಬದಿಯು ೧೮ ಇಂ. ಇರುವ ಘನದ ಎಲ್ಲ ಪೃಷ್ಠಭಾಗಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು? (೩) ಬ ವನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವಿರಿ? (೪) ಪೃಷ್ಠಭಾಗಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೬ ಚೌ. ಫೂ. ಇದ್ದರೆ ಬದಿಯು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು?

೪. (೧) ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ), ಅದರ ಎತ್ತರವು (ಎ) ಮತ್ತು ಅದರ ಘನಫಲವು (ಘ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (೨) ತ್ರಿಜ್ಯವು ೪ ಇಂ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೮ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಘನಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (೩) ಎ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು? (೪) ಘನಫಲವು ೨೩೧ ಘ. ಇಂ. ಮತ್ತು ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ೩೨ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (ಚಹದ ದುಂಡಗಿರುವ ಡಬ್ಬಿಯು ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಆಕಾರದ್ದಿರುತ್ತದೆ.)

೫. (೧) ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ), ಅದರ ಎತ್ತರವು (ಎ) ಮತ್ತು ಅದರ ವಕ್ರಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (೨) ಅದರ ಪೃಷ್ಠಫಲ (ಪ) (ವಕ್ರಭಾಗ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಬಾಯಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ) ಮತ್ತು ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೩) ಉ. ೪. (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (೪) ಅದರ ಪೃಷ್ಠಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (೫) ಎ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಎರಡೂ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೬) ಉ. ೪. (೪) ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಚಕ್ರವು ೨೮ ಇಂ. ವ್ಯಾಸನದು ಇದ್ದರೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ಪ್ರವಾಸದಲ್ಲಿ ಅದರ ಎಷ್ಟು ಸುತ್ತುಗಳು ಆಗುವವು? ವ್ಯಾಸವು (ವ್ಯಾ) (ಇಂಚುಗಳಲ್ಲಿ), ಅಂತರವು (ಅ) (ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ), ಮತ್ತು ಸುತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು (ಸ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೭. (೧) ತ್ರಿಕೋಣದ ತಳವು (ತ), ಅದರ ಎತ್ತರವು (ಎ) ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ತ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಯೋಜಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಯೋಜಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. (೨) ಎತ್ತರವು ೮ ಇಂ. ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೨೪ ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ತಳವು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು? (೩) ತಳವು ೧೦ ಇಂ. ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೩೫ ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರುವದು?

೮. ಸಮಕೋನಚತುರ್ಯ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಉ), ಅಗಲಳತೆಯು (ಅ), ಎತ್ತರವು (ಎ), ಮತ್ತು ಘನಫಲವು (ಘ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು (೧) ಉ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, (೨) ಅ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, (೩) ಎ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಘನಫಲವು ೩೫ ಘ. ಘಾ., ಎತ್ತರವು ೧೫ ಇಂ., ಮತ್ತು ಉದ್ದಳತೆಯು ೨೦ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಅಗಲವೆಷ್ಟು ?

೯. ಅಚಲಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುವ ಪದಾರ್ಥವು, ಬಿಡುಗಡೆಯಾದ ನಂತರ ಎಷ್ಟು ಸೆಕೆಂಡು ಕಾಲವು (ಕ) ಆಗಿರಬಹುದೋ ಅದರ ವರ್ಗದ ಹದಿನಾರು ಪಟ್ಟು ಘಾಟು ಅಂತರವನ್ನು (ಅ) ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ. ಗುಡ್ಡದ ತುದಿಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಬಿಟ್ಟು ಕಲ್ಲು ೩ ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಗುಡ್ಡದ ತಳದಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದರೆ, ಗುಡ್ಡದ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು ?

೧೦. ಒಂದು ಕರ್ಚೀರಿಯೊಳಗಿನ ಕಾರಕೂನನಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೬೫ ರೂ. ಪಗಾರು ಸಿಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೫ ರೂ. ಬಡತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. (೧) ಆದರೆ ಯಾವ ವರ್ಷ (ವ) ತಿಂಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಪಗಾರವು (ಪ) ಸಿಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು, (ಪ) ಈ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ರಚಿಸಿರಿ. (೨) ಹದಿನಾರನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ-ತಿಂಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಪಗಾರು ಸಿಗುತ್ತಿರಬಹುದು ? (೩) ವ ವನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. (೪) ತಿಂಗಳ ಪಗಾರವು ೧೨೦ ರೂ. ಯಾವ ವರ್ಷ ಸಿಗುತ್ತದೆ ?

೧೧. (೧) ನೆಲದ ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸುತ್ತಲು ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಗಲಳತೆಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಮಾರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ), ಕ್ಷೇತ್ರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ), ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದ ಅಗಲವು (ಅ), ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೨) ಕ್ಷೇತ್ರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ೧೦೫ ಘಾ. ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದ ಅಗಲವು ೭ ಘಾ. ಇದ್ದರೆ, ಮಾರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು ? (೩) ಕರ್ತೃವು ತ ಇದ್ದರೆ, ಸೂತ್ರದ ರಚನೆಯು ಹೇಗಿರುವದು ? (೪) ಮಾರ್ಗದ ಅಗಲವು ೧೪ ಘಾ.

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವದು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಬದಲಿಸುವದು ೬೩

ಇದ್ದು, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೨೩೬ ಚೌ. ಫು. ಇದ್ದರೆ, ಕ್ಷೇತ್ರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಎಷ್ಟಿರುವದು ?

೦೨. ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಹೋಗುವ ಸ ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು (ಬ), ಪ ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇದ್ದರೆ, $ಬ = \frac{ಸ^2}{೨} (೨ಸ+ಸ-೧)$ ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ೧೪ ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಮುಂದೆ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಹೋಗುವ ೧೨ ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಹೇಳಿರಿ. ತಾಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಪ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು ?

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳು (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದ್ದು)

೦

(ಪ + ಮ)^೩

೪-೧. ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೇ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದೆವು. ಈಗ ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

(ಪ + ಮ) ದ ವರ್ಗವು ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ, ಮತ್ತು ಪ + ಮ ದ ಘನವು ಅಂದರೆ ಪ + ಮ ದ ವರ್ಗ ಗುಣಲಿ ಪ + ಮ, ಅಂದರೆಯೇ,

$$\begin{aligned}
 (ಪ+ಮ)^೩ &= (ಪ + ಮ) (ಪ + ಮ)^೨ \\
 &= (ಪ + ಮ) (ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨) \\
 &= ಪ(ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨) + ಮ(ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨) \\
 &= ಪ^೩ + ೨ಪ^೨ಮ + ಪಮ^೨ + ಪಮ + ೨ಪಮ^೨ + ಮ^೩ \\
 &= ಪ^೩ + ೩ಪ^೨ಮ + ೩ಪಮ^೨ + ಮ^೩
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಘನವು ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ಘನ, ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದದ ಘನ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಂಡಿಸಿ ಪ^೩ + ಮ^೩ + ೩ಪಮ (ಪ + ಮ) ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು. ತರುವಾಯ ಅದು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅಧಿಕ ಆ ಎರಡು

ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುನ್ನುಡಿಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$$\begin{aligned} (\text{ಪ} + \text{ಮ})^2 &\equiv \text{ಪ}^2 + 2\text{ಪ}^1\text{ಮ} + 2\text{ಪಮ}^1 + \text{ಮ}^2 \\ &\equiv \text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 + 2\text{ಪ}^1\text{ಮ} + 2\text{ಪಮ}^1 \\ &\equiv \text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 + 2\text{ಪಮ} (\text{ಪ} + \text{ಮ}). \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡುಬಂದಿರಬಹುದು. ಆ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಸಮತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ \equiv ಈ ಒಂದು ಹೊಸ ಚಿಹ್ನೆಯ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಸಮತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು $=$ ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವು. ಆದರೆ ಈಗ ಅದೇ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ \equiv ಈ ಹೊಸ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಪ್ರಯೋಜನವೇನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ನಮ್ಮೆದುರು ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸಹೇತುಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದರಿಂದ ಏನಾದರೂ ಅದರ ನಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಯೋಜನವಿರಬಹುದೆಂಬುದು ನಿಜ.

‘ಮೂರು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡನೆಯದರ ವರ್ಗವು ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯದರ ಮುನ್ನುಡಿ, ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂರನೆಯದರ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರೇ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು’ ಎಂದು ನಮಗೆ ಯಾರಾದರೂ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಕೇಳಿದರೆ ನಾವು ಯಾ ಎಂಬುದು ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಯ-೧, ಯ, ಮತ್ತು ಯ+೧ ಇವು ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವವು, ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವು $ಯ^1 + 2(ಯ-೧) = (ಯ+೧)^1$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣದೊಳಗಿನ ಎಡಬದಿಯ $ಯ^1 + 2(ಯ-೧)$ ಈ ರಾಶಿಯು ಬಲಬದಿಯ $(ಯ+೧)^1$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಈ ಸಮತೆಯು ನಿತ್ಯಸ್ವರೂಪದ್ದಿರುತ್ತದೆಯೇ? ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ನಮಗೆ ಹೀಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು. ಈ ಸಮತೆಯು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಣಿಸಿದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯ ಮೇಲೆ, ಅಂದರೆ ಯದ ಮಾನವು (ಬೆಲೆಯು) ೪ ಇರುವವರೆಗೆ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆಯೇ ಅದು ನಿಮಿತ್ತದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದು ಅಂದರೆ ನೈಮಿತ್ತಿಕ ಇಲ್ಲವೆ ಪ್ರಾಸಂಗಿಕವಿರುತ್ತದೆ. ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಇರುವಂಥದ್ದು ಅಲ್ಲ, ಅದು ನಿರಂತರವಲ್ಲ. ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ,

(ಪ+ಮ)^೨ ≡ ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ ಈ ಸಮೀಕರಣದೊಳಗಿನ
 (ಪ+ಮ)^೨ ಮತ್ತು ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ ಈ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಸಮತೆಯು
 ಪ್ರಾಸಂಗಿಕ ಇಲ್ಲವೆ ನಿಮಿತ್ತದಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾದದ್ದಲ್ಲ. ಅದು ಸತತವಿರುವಂಥದ್ದು,
 ಅಂದರೆ ನಿತ್ಯಸ್ವರೂಪದ್ದು ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಮತೆಯು ನಿತ್ಯವಾದದ್ದು, ಸತತವಾದದ್ದು
 ಮತ್ತು ನಿರಂತರವಾದದ್ದು. ಈ ಸಮತೆಯು ಪದ ಅಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಮದ ಅಗಲಿ
 ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ನಿತ್ಯಸಮತೆಯಿರುವ
 ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ನಿತ್ಯಸಮ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು
 ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮತೆಯನ್ನು ≡ ಈ ಚಿನ್ಹದಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. = ಇದು
 ಸಮತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ಚಿನ್ಹವಿರುವದು. ಅದನ್ನು ಈ
 ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ತಪ್ಪಾಗುವದೆಂದಲ್ಲ. ಅದರೆ ನಿತ್ಯಸಮತೆಯನ್ನು
 ತೋರಿಸುವದು ≡ ಈ ಚಿನ್ಹದ ವಿಶೇಷ ಗುಣವಿರುತ್ತದೆ.

೪.೧. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು ಕೆಲವು ದ್ವಿಪದ
 ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ.

$$(ಅ+ಗ)^೨ ≡ (ಅ)^೨ + ೨(ಅ)(ಗ) + ೨(ಅ)(ಗ) + (ಗ)^೨$$

$$≡ ಅ² + ೨ಅಗ + ಗ².$$

$$(ತ+೨ದ)^೨ ≡ (ತ)^೨ + ೨(ತ)(೨ದ) + ೨(ತ)(೨ದ) + (೨ದ)²$$

$$≡ ತ² + ೪ತದ + ೪ದ².$$

$$(೪ಪ+೨ಮ)^೨ ≡ (೪ಪ)² + ೨(೪ಪ)(೨ಮ) + ೨(೪ಪ)(೨ಮ) + (೨ಮ)²$$

$$≡ ೧೬ಪ² + ೧೬ಪಮ + ೧೬ಮ².$$

೪.೨. ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ
 ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡದೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿ-
 ದೆವು. ಈಗ ಎರಡು ಪದಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು
 ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$(ಪ-ಮ)^೨ ≡ (ಪ-ಮ)(ಪ-ಮ)$$

$$≡ (ಪ - ಮ)(ಪ - ೨ಪಮ + ಮ)$$

$$≡ ಪ(ಪ - ೨ಪಮ + ಮ) - ಮ(ಪ - ೨ಪಮ + ಮ)$$

$$≡ ಪ² - ೨ಪಮ + ಪಮ - ಪಮ + ೨ಪಮ - ಮ²$$

$$≡ ಪ² - ೨ಪಮ + ಮ².$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ಘನವು ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಘನ, ಉಣಾ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಅಧಿಕ ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಉಣಾ ಎರಡನೇ ಪದದ ಘನದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮುಂಡಿಸಿ,
ಪಃ - ಮಃ - ಋಪಮ (ಪ - ಮ) ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರಬಹುದು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅದು ಎರಡು ಪದಗಳ ಘನ-ಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ ಉಣಾ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ-ಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂದು ಸಹ ಹೇಳಬಹುದು.

$$\begin{aligned} (ಪ-ಮ)^2 &\equiv ಪಃ - ಋಪಮ + ಋಪಮ - ಮಃ \\ &\equiv ಪಃ - ಮಃ - ಋಪಮ + ಋಪಮ \\ &\equiv ಪಃ - ಮಃ - ಋಪಮ (ಪ - ಮ). \end{aligned}$$

೪.೪. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು ಕೆಲವು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ.

$$\begin{aligned} (ಅಕ - ಗ)^2 &\equiv (ಅಕ)^2 - ೨(ಅಕ)(ಗ) + ೨(ಅಕ)(ಗ)^2 - (ಗ)^2 \\ &\equiv ಅಕ^2 - ೧ಅಕಗ + ೨ಕಗ^2 - ಗ^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ತ - ಋದ)^2 &\equiv (ತ)^2 - ೨(ತ)(ಋದ) + ೨(ತ)(ಋದ)^2 - (ಋದ)^2 \\ &\equiv ತ^2 - ೯ತಋದ + ೨೭ತದ^2 - ೨೭ದ^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ಉಪ-೭ಮ)^2 &\equiv (ಉಪ)^2 - ೨(ಉಪ)(೭ಮ) \\ &\quad + ೨(ಉಪ)(೭ಮ)^2 - (೭ಮ)^2 \\ &\equiv ೭ಉಪ^2 - ೨. ೧೭ಪಃ. ೭ಮ + ೨. ಉಪ. ೪೯ಮ^2 \\ &\quad - ೨೪೩ಮ^2 \\ &\equiv ೭ಉಪ^2 - ೩೩೭ಪಃಮ + ೫೮೮ಪಮ - ೨೪೩ಮ^2. \end{aligned}$$

೪.೫. ಯಾವದೇ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ

ಸುಧಾರಿಸಿ (ಪ+ಮ)^೨ ಮತ್ತು (ಪ-ಮ)^೨ ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳ ವಿಷಯ-
ದಲ್ಲಿಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೇರಿಸಬಹುದು.

ಯಾವದೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನವು ಮೊದಲನೇ ಪದದ
ಘನ, ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದ ಇವುಗಳ
ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ
ಪದದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮತ್ತು ಎರಡನೇ
ಪದದ ಘನ, ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ.

ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಪ-ಮ ಈ ರಾಶಿಯು ಪ+(-ಮ)
ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ (ಪ-ಮ) ದ ಘನವು ಮತ್ತು
ಪ+(-ಮ) ದ ಘನವು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂತರವೂ ಇರಲಾರದು. ಆದರೆ
ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ ನಾವು ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನದ
ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಆ ರಾಶಿಯು ಮೂಲತಃ ಎರಡು ಪದಗಳ
ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಆ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಅದರ
ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ತರುವಾಯ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಾವು
ಬರೆಯಬೇಕು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$\begin{aligned} (ಪ - ಮ)^2 &\equiv \{ ಪ + (-ಮ) \}^2 \\ &\equiv ಪ^2 + ೨ಪ(-ಮ) + ೨ಪ(-ಮ)^2 + (-ಮ)^2 \\ &\equiv ಪ^2 - ೨ಪಮ + ೨ಪಮ^2 - ಮ^2. \end{aligned}$$

ಪರಿಚ್ಛೇದ ೪.೨ ರಲ್ಲಿ (ಪ-ಮ)^೨ ದ ಯಾವ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೋ
ಅದೇ ಇದು ಇರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ೪.೪ ರೊಳಗಿನ ಕೊನೆಯ
ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆಯೇ ಬರೆದು ನೋಡುವಾ.

$$\begin{aligned} (೪ಪ - ೭ಮ)^2 &\equiv \{ ೪ಪ + (- ೭ಮ) \}^2 \\ &\equiv (೪ಪ)^2 + ೨(೪ಪ)(-೭ಮ) + ೨(೪ಪ)(-೭ಮ)^2 + (-೭ಮ)^2 \\ &\equiv ೧೬ಪ^2 + ೨.೨೮ಪ^2(-೭ಮ) + ೨.೪ಪ.೪೯ಮ^2 + (-೭೪೭ಮ)^2 \\ &\equiv ೧೬ಪ^2 - ೨೨೪ಪಮ + ೨೦೦ಪಮ^2 - ೭೪೭ಮ^2. \end{aligned}$$

ಮತ್ತು ಇದೇ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಅಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಚ್ಛೇದ ೪.೨ ರೊಳಗಿನ
ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರದ ವಿಷಯವಾಗಿ ನಿಯಮವನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಯಾವದೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನವು ಆ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಎರಡೂ ಪದಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅಧಿಕ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುನ್ನುಡಿಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ರಾಶಿಯು ಮೂಲತಃ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರದಿದ್ದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಆ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕು. ಖದಾಹರಣೆಗಾಗಿ (ಉಪ-೨ಮ)^೩ ಇದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಂತೆ ಮಾಡುವದು ಉಚಿತವಾಗುವದು.

$$\begin{aligned} (\text{ಉಪ-೨ಮ})^3 &\equiv \{ \text{ಉಪ} + (- ೨ಮ) \}^3 \\ &\equiv (\text{ಉಪ})^3 + (-೨ಮ)^3 + ೩(\text{ಉಪ})(-೨ಮ) \{ \text{ಉಪ} + (-೨ಮ) \} \\ &\equiv ೬ಉಪ^3 - ೩ಉ೩ಮ^3 - ೮ಉಪಮ (\text{ಉಪ} - ೨ಮ). \end{aligned}$$

೪.೬. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೇ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನಾವು ೩೧, ೩೯, ೯೮, ೧೦೪ ಮತ್ತು ೯೯೬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾ.

$$\begin{aligned} (೩೧)^3 &= (೩೦ + ೧)^3 \\ &= (೩೦)^3 + (೧)^3 + ೩. ೧. ೩೦. (೩೦ + ೧) \\ &= ೨೭೦೦೦ + ೧ + ೨೭೯೦ \\ &= ೨೯೭೯೧. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (೩೯)^3 &= (೪೦ - ೧)^3 \\ &= (೪೦)^3 - (೧)^3 - ೩. ೧. ೪೦. (೪೦ - ೧) \\ &= ೬೪೦೦೦ - ೧ - ೪೮೮೦ \\ &= ೫೯೧೧೯. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (೯೮)^3 &= (೧೦೦ - ೨)^3 \\ &= (೧೦೦)^3 - (೨)^3 - ೩. ೨. ೧೦೦. (೧೦೦ - ೨) \end{aligned}$$

$$= ೧೦೦೦೦೦೦ - ೮ - ೫೮೮೦೦$$

$$= ೯೪೧೧೯೭.$$

$$(೧೦೪)^2 = (೧೦೦ + ೪)^2$$

$$= (೧೦೦)^2 + (೪)^2 + ೨. ೪. ೧೦೦. (೧೦೦ + ೪)$$

$$= ೧೦೦೦೦೦೦ + ೧೬ + ೧೨೪೮೦೦$$

$$= ೧೧೨೪೮೧೬.$$

$$(೯೯)^2 = (೯)^2 + (೯೦)^2 + ೨ \times ೯ \times ೯೦$$

$$= ೮೧ + ೮೧೦೦ + ೧೬೨೦$$

$$= ೯೨೮೧.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

೧. ಪ+ಇಮ. ೨. ಲಕ+ಗ. ೩. ಇಸ-ಮ. ೪. ಯ-೨ರ.
 ೫. ಇಪ+೨ಮ. ೬. ಲಯ-೨ರ. ೭. ಓಪ-ಇರ. ೮. ೭ಪ+೨ಬ.
 ೯. ಲಯ+ಇ. ೧೦. ಇಪ-೨. ೧೧. ಬ+ಗ. ೧೨. ಇ-೨ಯ.
 ೧೩. ೨ಪ+ಇಬ. ೧೪. ಲ-ಇಮ. ೧೫. ಇಮ+೨. ೧೬. ಪ-ಲಬ.
 ೧೭. ಲಯ- $\frac{೮}{೯}$. ೧೮. ಇ- $\frac{೧}{೫}$. ೧೯. ಇ+ $\frac{೨ಯ}{೩}$. ೨೦. ಪ+ $\frac{ಬ}{೩}$.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

೨೧. ೪೫. ೨೨. ೮೭. ೨೩. ೫೫. ೨೪. ೮೯.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳಿರುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

೨೫. ಯ+ಗಯ+೨ಯ+೧೨೫.
 ೨೬. ಕ್ಷ+೨೧ಕ್ಷ+೧೪೭ಕ್ಷ-೩೪೩.
 ೨೭. ಲಪ+೨೦ಪ+ಗ೦ಪಬ-೧೨೫ಬ.
 ೨೮. ೨೧೬ಪ+೨೫೬ಪಮ+೮೮೨ಪಮ-೩೪೩ಮ.
 ೨೯. ೬೪ರ+೨೭೮-೩೬ರಲ (೪ರ-೩೮).
 ೩೦. ೭೯ಕ+೧೨೫ಗ+೧೩೫ಕಗ (೯ಕ+೫ಗ).

೨.

(ಪ + ಮ)(ಪ - ಪಮ + ಮ)

೪.೨. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ.

ಪ - ಪಮ + ಮ

ಪ + ಪಮ + ಮ

ಪ + ಮ

ಪ - ಮ

ಪ - ಪಮ + ಪಮ

ಪ + ಪಮ + ಪಮ

+ ಪಮ - ಪಮ + ಮ

- ಪಮ - ಪಮ - ಮ

ಪ - ಮ + ಮ

ಪ - ಮ - ಮ

ಮೇಲಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಹೀಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ, ಮತ್ತು ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು ಈ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

(ಪ + ಮ)(ಪ - ಪಮ + ಮ) ≡ ಪ + ಮ

(ಪ - ಮ)(ಪ + ಪಮ + ಮ) ≡ ಪ - ಮ;

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಾವು ಹೀಗೆಯೂ ತರ್ಕಿಸಬಹುದು,

(ಪ + ಮ) ÷ (ಪ + ಮ) = ಪ - ಪಮ + ಮ ಮತ್ತು

(ಪ - ಮ) ÷ (ಪ - ಮ) = ಪ + ಪಮ + ಮ.

ಪರಿಣಾಮದಲ್ಲಿ - ಮ ಮತ್ತು + (- ಮ) ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಮ ಮತ್ತು - (- ಮ). ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಏನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಲ್ಲಿಯ ಎರಡನೇ ಭಾಗವು ಮೊದಲನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಭೂತವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ,

$$\begin{aligned}
& (\text{ಪ} - \text{ಮ})(\text{ಪ} + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}) \\
& \equiv \{ \text{ಪ} + (-\text{ಮ}) \} \{ \text{ಪ} - (\text{ಪ})(-\text{ಮ}) + (-\text{ಮ})^2 \} \\
& \equiv (\text{ಪ})^2 + (-\text{ಮ})^2 \\
& \equiv \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2.
\end{aligned}$$

೪.೮. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಗುಣಾ-
ಕಾರ ಮಾಡುವದರಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಉ. ೧. $\text{ಅಕ} - \text{೧೦ಕಗ} + \text{೨ಜಗ}$ ಮತ್ತು $\text{ಅಕ} + \text{ಜಗ}$ ಇವುಗಳ
ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
& \text{ಅಕ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ಜಗ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ} \\
& \text{ಅಕ} = \text{ಪ}, \text{೧೦ಕಗ} = \text{ಪಮ}, \text{ಮತ್ತು } \text{೨ಜಗ} = \text{ಮ}. \text{ ಆದುದರಿಂದ,} \\
& (\text{ಅಕ} + \text{ಜಗ})(\text{ಅಕ} - \text{೧೦ಕಗ} + \text{೨ಜಗ}) = (\text{ಪ} + \text{ಮ})(\text{ಪ} - \text{ಪಮ} + \text{ಮ}) \\
& \quad = \text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 \\
& \quad = (\text{ಅಕ})^2 + (\text{ಜಗ})^2 \\
& \quad = \text{ಅಕ}^2 + \text{೧೨ಜಗ}^2.
\end{aligned}$$

ಉ. ೨. $\text{ಅಯ} - \text{೩ಕ್ಷ}$ ಮತ್ತು $\text{೬ಅಯ} + \text{೨ಅಯಕ್ಷ} + \text{೯ಕ್ಷ}^2$
ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
& (\text{ಅಯ} - \text{೩ಕ್ಷ})(\text{೬ಅಯ} + \text{೨ಅಯಕ್ಷ} + \text{೯ಕ್ಷ}^2) \\
& \quad = (\text{ಅಯ} - \text{೩ಕ್ಷ}) \{ (\text{ಅಯ}) + (\text{ಅಯ})(೩ಕ್ಷ) + (೩ಕ್ಷ)^2 \} \\
& \quad = (\text{ಅಯ})^2 - (೩ಕ್ಷ)^2 \\
& \quad = \text{೫೧೨ಯ}^2 - \text{೨೭ಕ್ಷ}^2.
\end{aligned}$$

ಉ. ೩. $\text{ಅರ} - \text{ರಲ} + \text{೪ಲ}^2$ ಇದಕ್ಕೆ $\text{೭ರ} + \text{೭ಲ}$ ದಿಂದ
ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
& (\text{೭ರ} + \text{೭ಲ})(\text{ಅರ} - \text{ರಲ} + \text{೪ಲ}^2) \\
& \quad = (\text{೭ರ} + \text{೭ಲ}) \{ (\text{೭ರ}) - (\text{೭ರ})(೭ಲ) + (೭ಲ)^2 \} \\
& \quad = (\text{೭ರ})^2 + (\text{೭ಲ})^2 \\
& \quad = \text{೩೪೩ರ}^2 + \text{೩೪೩ಲ}^2.
\end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಯ + ಖ, ಯಃ - ಖಯ + ಖ.
೨. ಯ - ಒ, ಯಃ + ಒಯ + ಖ.
೩. ಏಯ + ಒ, ಏಯಃ - ಒಯ + ಖ.
೪. ಒರ - ಖ, ಒರಃ + ಖರ + ಖ.
೫. ಖ - ಏಕ, ಖಃ + ಏಕ + ಒಕಃ.
೬. ಏ + ಏಕ, ಏ - ಒಕ + ಏಕಃ.
೭. ಖಕ - ಗ, ಖಕಃ + ಖಕಗ + ಗಃ.
೮. ಏಯ - ಖಕ, ಒಏಯಃ + ಏಕಯ + ಖಕಃ.
೯. ಒಕ್ಷ - ಖ, ಒಕ್ಷಃ + ಏಕ್ಷಃ + ಖ.
೧೦. ಒಕ್ಷ + ಒ, ಒಕ್ಷಃ - ಒಕ್ಷ + ಒ.
೧೧. ಒ + ಒಪ, ಒ - ಒಪ + ಒಪಃ.
೧೨. ಒಪ - ಒಪ, ಒಪಃ + ಒಪಬ + ಒಪಃ.
೧೩. ಏಯಕ್ಷ + ಒ, ಒಯಃಕ್ಷಃ - ಏಯಕ್ಷ + ಒ.
೧೪. ಒ - ಏಪಬ, ಏ + ಒಪಬ + ಒಪಬಃ.
೧೫. ಏಪಫ - ಒಬಮ, ಏ ಪಃಪಃ + ಒಪಫಬಮ + ಏಬಮಃ.
೧೬. ಏಯ + ಒರಲ, ಒಏಯಃ - ಏಯರಲ + ಒರಲಃ.
೧೭. ಒಯಃ + ಖಕ್ಷಃ, ಏಯಃ - ಖಯಃಕ್ಷಃ + ಖಕ್ಷಃ.
೧೮. ಏಯಃ - ಒಕ್ಷಃ, ಏಯಃ + ಒಯಃಕ್ಷಃ + ಏಕ್ಷಃ.
೧೯. ಖಪಃ + ಒಬಃ, ಖಪಃ - ಒಖಪಃಬಃ + ಏಬಃ.
೨೦. ಏಪಃ - ಏಬಃ, ಏಪಃ + ಒಪಪಃಬಃ + ಒಬಃ.

ತೆರಿವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

೨೧. ಒಏಯಃ + ಒಖಲಃ = (ಏಯ + ಖಲ) (.....).
೨೨. ಒರಃ - ಒಏಲಃ = (.....) (ಒರಃ + ಒರಲ + ಏಲಃ).
೨೩. ಒಖ - ಒಏಪಃ = (ಖ - ಏಪಃ) (.....).

೨೪. $೧೩೩೧ಯಿ + ೨೧೬ರಲಿ$

$$= (.....) (೧೧೧ಯಿ - ೬೬ಯರಲಿ + ೩೩ರಲಿ).$$

೨೫. $೩೪೩ಪಿ - ೫೧೨ಕ್ಷಿ = (೭ಪ - ೮ಕ್ಷ) (.....)$.

೨೬. $(೮ಯಿ - ೩೪೩ಲಿ) \div (೨ಯ - ೭ಲ) =$

೨೭. $(೨೭ರಲಿ + ೧೨೫ಲಿ) \div (೩ರ + ೫ಲ) =$

೨೮. $(೧ - ೨೧೬ಯಿ) \div (೧ + ೬ಯಿ + ೩೬ಯಿ) =$

೨೯. $(೧೦೦೦ಕ್ಷಿ + ೭೯) \div (೧೦ಕ್ಷಿ + ೯) =$

೩೦. $(೨೧೬ಯಿಕ್ಷಿ - ೧೨೫ಪಿ) \div (೩೬ಯಿಕ್ಷಿ + ೩೦ಪಯಕ್ಷಿ + ೨೫ಪಿ)$
 $=$

೩೧. $(೫೧೨ಪಿ - ೩೪೩ಲಿ) \div (.....) = (೬೪ಪಿ + ೫೬ಪಲ + ೪೯ಲಿ).$

೩೨. $(೧೩೩೧ಲಿ + ೧೨೫ವಿ) \div (.....) = ೧೨೧ಲಿ - ೫೫ಲವ + ೨೫ವಿ.$

೩೩. $(೬೪ಯಿ - ೭೯ಲಿ) \div (೧೬ಯಿ + ೩೬ಯಲ + ೮೧ಲಿ) =$

೩೪. $(.....) \div (೩ಕ - ೮ಗ) = ೯ಕ + ೨೪ಕಗ + ೬೪ಗ.$

೩೫. $(....) \div (೨೫ಯಿ - ೩೫ಯಕ್ಷಿ + ೪೯ಕ್ಷಿ) = ೫ಯ + ೭ಕ್ಷ.$

೩.

(ಯ + ಪ)(ಯ + ಬ)(ಯ + ಮ)

೪.೯. ಹಿಂದೆ ನಾವು (ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ) \equiv ಯಿ+(ಪ+ಬ)ಯ+ಪಬ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ನಾವು ಈಗ (ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ) ದ ವಿಸ್ತಾರವು ಹೇಗಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು, ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಪದವು ಒಂದೇ ಇರುವ (ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ)ದಂಥ ಮೂರು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವ ಸ್ವರೂಪದ್ದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$(ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ) \equiv \{ ಯಿ+(ಪ+ಬ)ಯ+ಪಬ \} (ಯ+ಮ)$$

$$\equiv ಯ \{ ಯಿ+(ಪ+ಬ)ಯ+ಪಬ \}$$

$$+ ಮ \{ ಯಿ+(ಪ+ಬ)ಯ+ಪಬ \}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಯ}^2 + (\text{ಪ}+\text{ಬ})\text{ಯ}^1 + \text{ಪಬಯ} + \text{ಮಯ}^1 + (\text{ಪ}+\text{ಬ})\text{ಮಯ} + \text{ಪಬಮ} \\ &\equiv \text{ಯ}^2 + (\text{ಪ}+\text{ಬ})\text{ಯ}^1 + \text{ಮಯ}^1 + \text{ಪಬಯ} + (\text{ಬಮ} + \text{ಮಪ})\text{ಯ} + \text{ಪಬಮ} \\ &\equiv \text{ಯ}^2 + (\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ})\text{ಯ}^1 + (\text{ಪಬ}+\text{ಬಮ}+\text{ಮಪ})\text{ಯ} + \text{ಪಬಮ}. \end{aligned}$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ, ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಪದವಿರುವ ಮೂರು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು, ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ಘನ, ಅಧಿಕ ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಅಧಿಕ ಸಾಧಾರಣ ಪದ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಅಧಿಕ ಅಮೂರೂ ಭಿನ್ನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೧. ಯ+೧, ಯ+೨ ಮತ್ತು ಯ+೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} &(\text{ಯ}+೧)(\text{ಯ}+೨)(\text{ಯ}+೩) \\ &= \text{ಯ}^2 + (೧+೨+೩)\text{ಯ}^1 + (೧.೨ + ೨.೩ + ೩.೧)\text{ಯ} + ೧.೨.೩ \\ &= \text{ಯ}^2 + ೬\text{ಯ}^1 + ೧೧\text{ಯ} + ೬. \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ಕ್ಷ+೩, ಕ್ಷ+೫, ಮತ್ತು ಕ್ಷ+೧೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} &(\text{ಕ್ಷ}+೩)(\text{ಕ್ಷ}+೫)(\text{ಕ್ಷ}+೧೧) \\ &= \text{ಕ್ಷ}^2 + (೩+೫+೧೧)\text{ಕ್ಷ}^1 + (೩.೫+೫.೧೧ + ೧೧.೩) \text{ಕ್ಷ} + ೩.೫.೧೧ \\ &= \text{ಕ್ಷ}^2 + ೧೯\text{ಕ್ಷ}^1 + ೧೦೩\text{ಕ್ಷ} + ೧೬೫. \end{aligned}$$

ಉ. ೩. ಪ-೫, ಪ+೭ ಮತ್ತು ಪ+೪ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} &(\text{ಪ}-೫)(\text{ಪ}+೭)(\text{ಪ}+೪) = \text{ಪ}^2 + (-೫+೭+೪)\text{ಪ}^1 \\ &\quad + (-೫.೭+೭.೪-೫.೪)\text{ಪ}-೫.೭.೪ \\ &= \text{ಪ}^2 + ೬\text{ಪ}^1 - ೨೭\text{ಪ} - ೧೪೦. \end{aligned}$$

ಉ. ೪. ೨ಯ-೩ಕ, ೨ಯ+೭ಗ ಮತ್ತು ೨ಯ-೫ಘ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

$(\text{ಅಯ-ಇಕ})(\text{ಅಯ+ಒಗ})(\text{ಅಯ-ಇಘ}) = (\text{ಅಯ})^3 + (-\text{ಇಕ}+\text{ಒಗ}-\text{ಇಘ})(\text{ಅಯ})^2$
 $+ (-\text{ಇಕ.ಒಗ}-\text{ಇಘ.ಒಗ}+\text{ಇಕ.ಇಘ})(\text{ಅಯ}) + (-\text{ಇಕ})(\text{ಒಗ})(-\text{ಇಘ})$
 $= \text{ಅಯ}^3 + \text{ಒಗ}(\text{ಒಗ}-\text{ಇಕ}-\text{ಇಘ})\text{ಅಯ}^2 + \text{ಒಗ}(\text{ಇಕ.ಇಘ}-\text{ಒಗ.ಒಗ}-\text{ಇಕ.ಇಘ})\text{ಅಯ}$
 $+ \text{ಒಗ.ಇಘ.ಇಕ.ಒಗ.ಇಘ}.$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. ಯ+೨, ಯ+೪, ಯ+೬. ೨. ಯ-೧, ಯ-೩, ಯ-೫.
೩. ಷ್ವ+೪, ಷ್ವ+೧, ಷ್ವ-೨. ೪. ಮ-೬, ಮ-೩, ಮ+೧.
೫. ಪ-೧, ಪ-೫, ಪ+೬. ೬. ೧+ಯ, ೪+ಯ, ೮+ಯ.
೭. ೩-ಷ್ವ, ೭-ಷ್ವ, ೧೦-ಷ್ವ. ೮. ಅಯ+೧, ಅಯ+೩, ಅಯ+೫.
೯. ೩ಷ್ವ-೨, ೩ಷ್ವ-೪, ೩ಷ್ವ-೫. ೧೦. ೪ಷ್ವ-೧, ೪ಷ್ವ+೩, ೪ಷ್ವ+೬.
೧೧. ೫ಷ್ವ-೬, ೫ಷ್ವ-೩, ೫ಷ್ವ+೧. ೧೨. ೭ಷ್ವ-೧, ೭ಷ್ವ-೫, ೭ಷ್ವ+೬.
೧೩. ಅಷ್ವ-ಕ, ಅಷ್ವ+೪ಕ, ಅಷ್ವ-೩ಕ. ೧೪. ೪ಪ-೩ಕ, ೪ಪ-೫ಕ, ೪ಪ+೭ಕ.
೧೫. ಅಗ+ಯ, ೩ಗ+ಯ, ೬ಗ+ಯ. ೧೬. ೫ನ-ಯ, ೪ನ-ಯ, ೮ನ-ಯ.
೧೭. ೫ಯ+೩ಕ, ೫ಯ+೬ಗ, ೫ಯ+೮ಗ.
೧೮. ಅಯ-ಕ, ಅಯ+೩ಗ, ಅಯ-ಇಘ.
೧೯. ಅಪ+೩ಯ, ೪ಬ+೩ಯ, ೭ಮ+೩ಯ.
೨೦. ಪ-೪ಯ, ೩ಪ-೪ಯ, ೫ಪ-೪ಯ.

ಐದನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಹಿಂದಿನ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಜನೆ

೧.

$(ಪ+ಮ)^೨ \equiv ಪ^೨+೨ಪಮ+ಮ^೨$; $(ಪ-ಮ)^೨ \equiv ಪ^೨-೨ಪಮ+ಮ^೨$.

ಜ.೧. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಯಾವದೇ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $೪ಯ+೯ಕ್ಷ$ ದ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು $(೪ಯ)^೨+೨(೪ಯ)(೯ಕ್ಷ)+(೯ಕ್ಷ)^೨$ ಅಂದರೆಯೇ $೧೬ಯ^೨+೭೨ಯಕ್ಷ+೮೧ಕ್ಷ^೨$ ಎಂದು, ಅಥವಾ $೪ಯ-೯ಕ್ಷ$ ದ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು $(೪ಯ)^೨-೨(೪ಯ)(೯ಕ್ಷ)+(೯ಕ್ಷ)^೨$ ಅಂದರೆಯೇ $೧೬ಯ^೨-೭೨ಯಕ್ಷ+೮೧ಕ್ಷ^೨$ ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಯಾವದೊಂದು ಪದಾವಲಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು ಇಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದೇ? $ಪ+ಬ+ಮ$ ಈ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು $ಪ+ಬ+ಮ$ ದ ವರ್ಗವೆಂದರೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ಗುಣಲಿ $ಪ+ಬ+ಮ$. ಅಂದ ಮೇಲೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ದ ವರ್ಗವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದರೆ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಂತೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ಕ್ಕೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು ಅತ್ಯವಶ್ಯವಿದೆಯೇ?

$ಪ+ಬ+ಮ$

× $ಪ+ಬ+ಮ$

ಪ^೨+ಪಬ+ಪಮ

+ ಪಬ

+ ಬ^೨+ಬಮ

+ ಪಮ

+ ಬಮ + ಮ^೨

ಪ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಮ+ಬ^೨+೨ಬಮ+ಮ^೨

ಅಂದರೆ $ಪ^೨+ಬ^೨+ಮ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಮ+೨ಬಮ$.

$ಪ+ಬ+ಮ$ ಈ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ $ಬ+ಮ$ ಈ ಭಾಗಕ್ಕೆ ನಾವು ೨ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು

ಪ + ಅ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ (ಪ + ಬ + ಮ)^೨ = (ಪ + ಅ)^೨

$$= ಪ^೨ + ೨ಪಅ + ಅ^೨$$

$$= ಪ^೨ + ೨ಪ(ಬ + ಮ) + (ಬ + ಮ)^೨ \text{ [ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮೊದಲಿನ (ಬ + ಮ) ಬರೆಯಲಾಗಿ]}$$

$$= ಪ^೨ + ೨ ಪಬ + ೨ ಪಮ + ಬ^೨ + ೨ ಬಮ + ಮ^೨$$

$$= ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಪಮ + ೨ಬಮ.$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಮೂರು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು.

ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಎಷ್ಟಾಗಬಹುದು? ಪ+ಬ+ಮ+ಸ ದ ವರ್ಗವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಅದೇಷ್ಟಾಗಬಹುದು?

$$(ಪ+ಬ+ಮ+ಸ)^೨ = ಪ^೨+೨ಪ(ಬ+ಮ+ಸ)+(ಬ+ಮ+ಸ)^೨$$

$$= ಪ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಮ+೨ಪಸ+ಬ^೨+ಮ^೨+ಸ^೨$$

$$+೨ಬಮ+೨ಬಸ+೨ಮಸ$$

$$= ಪ^೨+ಬ^೨+ಮ^೨+ಸ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಮ+೨ಪಸ$$

$$+೨ಬಮ+೨ಬಸ+೨ಮಸ.$$

ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು.

ಇದರಂತೆಯೇ ನಾವು ಪದಾವಲಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಎಷ್ಟೇ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಪದಾವಲಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$(ಯ + ಅರ + ಜಲ)^2$$

$$= (ಯ)^2 + (ಅರ)^2 + (ಜಲ)^2 + ೨(ಯ)(ಅರ) + ೨(ಯ)(ಜಲ) + ೨(ಅರ)(ಜಲ)$$

$$= ಯ^2 + ಅರ^2 + ೨ಜಲ^2 + ೪ಯರ + ೧೦ಯಲ + ೨೦ರಲ.$$

$$(ಅಯ - ಜರ + ಳಲ)^2$$

$$= (ಅಯ)^2 + (-ಜರ)^2 + (ಳಲ)^2 + ೨(ಅಯ)(-ಜರ) + ೨(ಅಯ)(ಳಲ) + ೨(-ಜರ)(ಳಲ)$$

$$= ಅಯ^2 + ೨ಜರ^2 + ೧೬ಲ^2 - ೪೦ಯರ + ೧೬ಯಲ - ೪೦ರಲ.$$

$$(ಇಕ - ಅಗ - ಳಘ)^2$$

$$= (ಇಕ)^2 + (-ಅಗ)^2 + (-ಳಘ)^2 + ೨(ಇಕ)(-ಅಗ) + ೨(ಇಕ)(-ಳಘ) + ೨(-ಅಗ)(-ಳಘ)$$

$$= ೯ಕ^2 + ಅಗ^2 + ೧೬ಘ^2 - ೧೨ಕಗ - ೨೪ಕಘ + ೧೬ಗಘ.$$

$$(ಜಯ - ಳರ - ಅಲ + ಇವ)^2$$

$$= (ಜಯ)^2 + (-ಳರ)^2 + (-ಅಲ)^2 + (ಇವ)^2 + ೨(ಜಯ)(-ಳರ) + ೨(ಜಯ)(-ಅಲ) + ೨(ಜಯ)(ಇವ) + ೨(-ಳರ)(-ಅಲ) + ೨(-ಳರ)(ಇವ) + ೨(-ಅಲ)(ಇವ)$$

$$= ೨೫ಯ^2 + ೧೬ರ^2 + ೪ಲ^2 + ೯ವ^2 - ೪೦ಯರ - ೨೦ಯಲ + ೨೦ಯವ + ೧೬ರಲ - ೨೪ರವ - ೧೨ಲವ.$$

ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದನಂತರ ನಡುವಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವದೇ ಪದಾವಲಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

೧. ಜಯ+೧೨. ೨. ೯ಯ-೭. ೩. ೧೫ಪ+೨ಬ.

೪. ೧೮ಪ-೫ಮ. ೫. ೪ಯ+೫ರ+೨ಲ. ೬. ೩ಯ-೭ರ+೪ಲ.

೭. ೨ಕ-೫ಗ-೩ಘ. ೮. ೩ಪ+೭ಬ+೨. ೯. ೪ಕ-೩ಗ+೭.

೧೦. ೭ಪ-೨ಬ-೧. ೧೧. ೩-೪ಯ-೫ಕ್ಷ. ೧೨. ೨-೮ಯ+೩ಕ್ಷ.

೧೩. ಯ^೨+ಯ+೧. ೧೪. ಕ್ಷ^೨+೨ಕ್ಷ+೧. ೧೫. ಪ^೨-೪ಪ+೪.

೧೬. ಪ^೨+೨ಪಬ+೨ಬ^೨. ೧೭. ಯ^೨-೩ಯಕ್ಷ+೩ಕ್ಷ^೨.

೧೮. ೪+೨ಯ+ಯ^೨. ೧೯. ೮-೪ಯ+೩ಯ^೨.

೨೦. ಯ^೨+ಕ್ಷ^೨+೪. ೨೧. ಮ^೪-ಮ^೨-೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳಿರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ :

೨೨. ಪ^೨+೯ಬ^೨+೧೬ಮ^೨+೬ಪಬ+೮ಪಮ+೨೪ಬಮ.

೨೩. ೪ಕ^೨-೮ಕಖ+೪ಖ^೨-೧೨ಖಗ+೯ಗ^೨+೧೨ಕಗ.

೨೪. ೨೫ಪ^೨+೪ಬ^೨+೯ಮ^೨-೨೦ಪಬ+೧೨ಬಮ-೩೦ಪಮ.

೨೫. ೧೬ಯ^೨+೮^೨+೪ಲ^೨-೮ಯರ-೪ರಲ+೧೬ಯಲ.

ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ :

೨೬. (೨ಯ+೩ರ.....)^೨=.....+೨೫ಲ^೨.....-೨೦ಯಲ.....

೨೭. (೩ಪ.....)^೨=.....+೪ಬ^೨+ಮ^೨-೧೨ಪಬ.....+೪ಬಮ.

೨೮. (.....-೪ಗ.....)^೨=೪ಕ^೨.....+೯ಘ^೨-೧೬ಕಗ+೧೨ಕಘ.....

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

೨೯. (ಪ-೨ಬ+೪ಮ)^೨+(೨ಪ+ಬ-೩ಮ)^೨.

೩೦. (೨ಯ-೪ರ+೩ಲ)^೨-(ಯ-೫ರ-೨ಲ)^೨.

೩೧. (೩ಕ-೨ಗ+೪ಘ)-(೨ಕ-೫ಕ-ಘ)^೨+(ಕ+೬ಗ-೨ಘ)^೨.

೨.

(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) = ಪ^೨-ಮ^೨

೫.೨. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅನೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೪ಯ+೧೧ಕ್ಷ ಮತ್ತು ೪ಯ-೧೧ಕ್ಷ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಹೇಳುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು ೧೬ಯ^೨-೧೨೧ಕ್ಷ^೨ ಇರುವದೆಂದು ನಾವು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು. ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ತ್ರಿಪದ ಅಥವಾ ಬಹುಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅನೇಕಸಾರೆ ಇದೇ ಸೂತ್ರದ

ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಅದನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಬಲ್ಲೆವೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಪೌ - ಪಮ + ಮೌ ಮತ್ತು ಪೌ + ಪಮ + ಮೌ ಈ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಪೌ + ಮೌ ಈ ಸಾಧಾರಣ ಭಾಗಕ್ಕಾಗಿ ಆ ಈ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಆ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಅ - ಪಮ ಮತ್ತು ಅ + ಪಮ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ (ಪೌ - ಪಮ + ಮೌ) (ಪೌ + ಪಮ + ಮೌ)

$$= (ಅ - ಪಮ) (ಅ + ಪಮ)$$

$$= ಅೌ - ಪೌಮೌ$$

$$= (ಪೌ + ಮೌ) - ಪೌಮೌ (\because ಅ = ಪೌ + ಮೌ)$$

$$= ಪೌ + ಪೌಮೌ + ಮೌ - ಪೌಮೌ$$

$$= ಪೌ + ಪೌಮೌ + ಮೌ.$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡುಬರುವದು. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದು. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು :

(ಪೌ + ಪಮ + ಮೌ) (ಪೌ - ಪಮ + ಮೌ) \equiv ಪೌ + ಪೌಮೌ + ಮೌ.

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವು ನಮಗೆ ಬಹಳ ಸಲ ಆಗುವದರಿಂದ ಅದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು.

ಜಿ.೩. (ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) \equiv ಪ-ಮೌ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಕೆಳಗೆ ಮಾಡರಿಗಾಗಿ ಕೆಲವು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಉ.೧. ೪ಕ + ೫ಗ - ೭ಘ ಮತ್ತು ೪ಕ + ೫ಗ + ೭ಘ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ೪ಕ + ೫ಗ ಇದನ್ನು ಆ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
 (ಅಕ+ಚಗ-೭ಘ)(ಅಕ+ಚಗ+೭ಘ) &= (ಅ-೭ಘ)(ಅ+೭ಘ)* \\
 &= ಅ^೨ - ೭ಘ^೨* \\
 &= (ಅಕ+ಚಗ)^೨ - ೭ಘ^೨ [\because ಅ = ಅಕ+ಚಗ] \\
 &= ೧೬ಕ^೨ + ೪೦ಕಗ + ೨೫ಗ^೨ - ೭ಘ^೨.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ಅಪ - ಫಬ + ಅಮ ಮತ್ತು ಅಪ + ಫಬ - ಅಮ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಫ ಬ - ಅಮ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ.

$$\begin{aligned}
 (ಅಪ - ಫಬ + ಅಮ) (ಅಪ + ಫಬ - ಅಮ) \\
 &= \{ ಅಪ - (ಫ ಬ - ಅಮ) \} \{ ಅಪ + (ಫಬ - ಅಮ) \} \\
 &= (ಅಪ - ಅ) (ಅಪ + ಅ)* \\
 &= ೬ಅಪ^೨ - ಅ^೨* \\
 &= ೬ಅಪ^೨ - (ಫಬ - ಅಮ)^೨ [\because ಅ = ಫಬ - ಅಮ] \\
 &= ೬ಅಪ^೨ - (೮ಗಬ^೨ - ೭೨ಬಮ + ೧೬ಮ^೨) \\
 &= ೬ಅಪ^೨ - ೮ಗಬ^೨ + ೭೨ಬಮ - ೧೬ಮ^೨.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೩. ಚಯ + ಅರ - ಁಲ - ೭ವ ಮತ್ತು ಚಯ + ಅರ + ಁಲ + ೭ವ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಚಯ + ಅರ ವನ್ನು ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ಁಲ + ೭ವ ವನ್ನು ಮ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
 (ಚಯ + ಅರ - ಁಲ - ೭ವ) (ಚಯ + ಅರ + ಁಲ + ೭ವ) \\
 &= \{ (ಚಯ + ಅರ) - (ಁಲ + ೭ವ) \} \{ (ಚಯ + ಅರ) + (ಁಲ + ೭ವ) \} \\
 &= (ಪ - ಮ) (ಪ + ಮ)* \\
 &= ಪ^೨ - ಮ^೨* \\
 &= (ಚಯ + ಅರ)^೨ - (ಁಲ + ೭ವ)^೨ [ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳ ಮೊದಲಿನ ಬೆಲೆ-
ಗಳನ್ನು ಇಡಲಾಗಿ] \\
 &= (೨ಚಯ^೨ + ೪೦ಯರ + ೧೬ರ^೨) - (೯ಲ^೨ + ೪೨ಲವ + ೪೯ವ^೨) \\
 &= ೨ಚಯ^೨ + ೪೦ಯರ + ೧೬ರ^೨ - ೯ಲ^೨ - ೪೨ಲವ - ೪೯ವ^೨.
 \end{aligned}$$

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ನಂತರ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಬಹುದು.

೫.೪. ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಕೃತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಮುಂದಿನ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಯು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದು. (ಪ+ಮ) (ಪ-ಮ) \equiv ಪ^೧-ಮ^೧ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು ಒಂದೇ ಇರುವ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಿ ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು. ೩ಯ+೨ರ-೫ಲ-೮ವ ಮತ್ತು ೩ಯ-೨ರ+೫ಲ-೮ವ ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ೩ಯದ ಹಿಂದೆ+ಚಿನ್ಹ-ವಿದ್ದು ೮ವ ದ ಹಿಂದೆ-ಚಿನ್ಹವಿರುವದು. ಇದರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ೨ರ ದ ಹಿಂದೆ ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ+ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ-, ಹಾಗೂ ೫ಲ ದ ಹಿಂದೆ ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ-ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ+, ಅಂದರೆ ಭಿನ್ನ ಚಿನ್ಹಗಳಿರುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ೩ಯ-೮ವ ಎಂದು ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ೨ರ-೫ಲ ಎಂದು ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರಾಶಿಗಳ ಪುನರ್ವರ್ಜನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಪ+ಮ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ಎಂದರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಪ-ಮ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ (ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) \equiv ಪ^೧-ಮ^೧ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 & (೩ಯ+೨ರ-೫ಲ-೮ವ)(೩ಯ-೨ರ+೫ಲ-೮ವ) \\
 &= \{ (೩ಯ-೮ವ)+(೨ರ-೫ಲ) \} \{ (೩ಯ-೮ವ)-(೨ರ-೫ಲ) \} * \\
 &= (೩ಯ-೮ವ)^೧ - (೨ರ-೫ಲ)^೧ \\
 &= (೯ಯ^೧ - ೪೮ಯವ + ೬೪ವ^೧) - (೪ರ^೧ - ೨೦ರಲ + ೨೫ಲ^೧) \\
 &= ೯ಯ^೧ - ೪೮ಯವ + ೬೪ವ^೧ - ೪ರ^೧ + ೨೦ರಲ - ೨೫ಲ^೧.
 \end{aligned}$$

*ಇದರ ಮುಂದಿನ ಹಂತವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಕಠಿಣವೆನಿಸಿದರೆ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ೩ಯ-೮ವ ಮತ್ತು ೨ರ-೫ಲ ಇವುಗಳಿಗಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ

ಪ ಮತ್ತು ಮ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ಎರಡು ವರ್ಣಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು, ಅಂದರೆ ಮುಂದಿನ ಹಂತವು (ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) ಆಗುವದು, ಅದರ ಮುಂದಿನ ಹಂತವು ಪ-ಮ ಇದು ಇರುವದು. ಈಗ ಇಲ್ಲಿ ಪ ಗಾಗಿ ಡಿಯ-ಉ ಮತ್ತು ಮ ಗಾಗಿ ಅ-ಇ ಬರೆದರೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮುಂದಿನ ಹಂತವು (ಡಿಯ-ಉ)- (ಅ-ಇ) ಬರುವದು.

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

೧. ಕ+ಗ+ಘ, ಕ+ಗ-ಘ. ೨. ಕ-ಗ+ಘ, ಕ+ಗ+ಘ.
೩. ಕ-ಗ+ಘ, ಕ+ಗ-ಘ. ೪. ಒಪ-ಬ+ಲಮ, ಒಪ+ಬ+ಲಮ.
೫. ಒಪ-ಅಬ+ಮ, ಒಪ+ಅಬ-ಮ. ೬. ಅಯ-ಅರ-ಅಲ, ಅಯ+ಅರ-ಅಲ.
೭. ಅಕ-ಅಗ+ಲಘ, ಅಕ+ಅಗ-ಲಘ. ೮. ಅಯ-ಅರ+ಅಲ, ಅರ+ಅಲ-ಅಯ.
೯. ಯ+ಅಯರ+ಅರ, ಯ-ಅಯರ-ಅರ.
೧೦. ಅಯ-ಯಲ-ಲ, ಅಯ+ಯಲ-ಲ.
೧೧. ಅಪ-ಅಪಬ+ಅಬ, ಅಪ+ಅಪಬ-ಅಬ.
೧೨. ಅಕ-ಅಕಗ+ಅಗ, ಅಗ+ಅಕಗ-ಅಕ.
೧೩. ಯ+ಯ+ಗ, ಯ-ಯ+ಗ.
೧೪. ಅಯ+ಅಯ+ಗ, ಅಯ-ಅಯ+ಗ.
೧೫. ಅಪ-ಅಪ+ಗ, ಅಪ+ಅಪ+ಗ.
೧೬. ಅಪ-ಅಪ+ಗ, ಅಪ+ಅಪ+ಗ.
೧೭. ಅಪ+ಅಪಬ+ಬ, ಅಪ-ಅಪಬ+ಬ.
೧೮. ಅಯ-ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ, ಅಯ+ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ.
೧೯. ಅಯ-ಅಯ+ಲ, ಅಯ+ಅಯ-ಲ.
೨೦. ಅಕ್ಷ-ಅಯ+ಲ, ಅಕ್ಷ+ಅಯ+ಲ.
೨೧. ಅಯ+ಅಯ-ಅಯ+ಲ, ಅಯ-ಅಯ+ಅಯ+ಲ.
೨೨. ಅಕ್ಷ-ಅಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ-೭, ಅಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ-ಅಕ್ಷ+೭.
೨೩. ಅಕ್ಷ-ಅಕ್ಷ+೭, ಅಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ-೭.
೨೪. ಅಕ+ಅಖ-ಅಗ+ಲಘ, ಅಕ-ಅಖ+ಅಗ-ಲಘ.
೨೫. ಅಯ+ಅಯ+ಗ, ಅಯ-ಅಯ+ಗ, ಅಯ-ಅಯ+ಗ.

೩.

$$(\text{ಪ}+\text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2+\text{ಮ}^2+2\text{ಪಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ});$$

$$(\text{ಪ}-\text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2-\text{ಮ}^2-2\text{ಪಮ}(\text{ಪ}-\text{ಮ}).$$

೫.೫. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವದೇ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಇವೇ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. $\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ}$ ಈ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯುವದಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $\text{ಪ}+\text{ಬ}$ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$(\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ})^2$$

$$=(\text{ಅ}+\text{ಮ})^2$$

$$= \text{ಅ}^2+\text{ಮ}^2+2\text{ಅಮ}(\text{ಅ}+\text{ಮ})$$

$$=(\text{ಪ}+\text{ಬ})^2+\text{ಮ}^2+2\text{ಮ}(\text{ಪ}+\text{ಬ})(\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ}) \quad [\because \text{ಅ}=\text{ಪ}+\text{ಬ}]$$

$$= \text{ಪ}^2+\text{ಬ}^2+2\text{ಪಬ}(\text{ಪ}+\text{ಬ})+\text{ಮ}^2+2(\text{ಪಮ}+\text{ಬಮ})(\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ})$$

$$= \text{ಪ}^2+\text{ಬ}^2+\text{ಮ}^2+2\text{ಪಬ}(\text{ಪ}+\text{ಬ})+2\text{ಪಮ}(\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ})$$

$$+2\text{ಬಮ}(\text{ಪ}+\text{ಬ}+\text{ಮ})$$

$$= \text{ಪ}^2+\text{ಬ}^2+\text{ಮ}^2+2\text{ಪಬ}(\text{ಪ}+\text{ಬ})+2\text{ಪಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ})+2\text{ಪಬಮ}$$

$$+2\text{ಪಬಮ}+2\text{ಬಮ}(\text{ಬ}+\text{ಮ})$$

$$= \text{ಪ}^2+\text{ಬ}^2+\text{ಮ}^2+2\text{ಪಬ}(\text{ಪ}+\text{ಬ})+2\text{ಬಮ}(\text{ಬ}+\text{ಮ})+2\text{ಪಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ})$$

$$+2\text{ಪಬಮ}.$$

ಕಂಸಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಈ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು $\text{ಪ}^2+\text{ಬ}^2+\text{ಮ}^2+2\text{ಪಬ}+2\text{ಪಬಮ}+2\text{ಬಮ}+2\text{ಪಮ}+2\text{ಪಬಮ}+2\text{ಬಮ}+2\text{ಪಮ}+2\text{ಪಬಮ}$ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆದು ತೋರಿಸಿದೆ.

ಉ. ೧. ಅಯ + ಋರ + ಲ ದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಅಯ + ಋರ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ} + \text{ಲ})^3$

$= (\text{ಅ} + \text{ಲ})^3$

$= \text{ಅ}^3 + \text{ಲ}^3 + 3\text{ಅಲ}(\text{ಅ} + \text{ಲ})$

$= (\text{ಅಯ} + \text{ಋರ})^3 + \text{ಲ}^3 + 3\text{ಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ})(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ} + \text{ಲ}) [\because \text{ಅ} = \text{ಅಯ} + \text{ಋರ}]$

$= \text{ಅಯ}^3 + 3\text{ಅಯ}^2\text{ಋರ} + 3\text{ಅಯ}\text{ಋರ}^2 + \text{ಋರ}^3 + \text{ಲ}^3$

$+ 3\text{ಅಯಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ} + \text{ಲ}) + 3\text{ಋರಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ} + \text{ಲ})$

$= \text{ಅಯ}^3 + 3\text{ಅಯ}^2\text{ಋರ} + \text{ಲ}^3 + 3\text{ಅಯಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ}) + 3\text{ಅಯಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ})$

$+ 3\text{ಋರಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ}) + 3\text{ಋರಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ})$

$= \text{ಅಯ}^3 + 3\text{ಅಯ}^2\text{ಋರ} + \text{ಲ}^3 + 3\text{ಅಯಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ}) + 3\text{ಅಯಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ})$

$+ 3\text{ಋರಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ}) + 3\text{ಋರಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ}).$

ಕಂಸಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ನಮಗೆ ಇದೇ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಅಯ³ + 3ಅಯ²ಋರ + ಲ³ + 3ಅಯಲ(ಅಯ + ಋರ) + 3ಋರಲ(ಅಯ + ಲ) + 3ಅಯಲ(ಅಯ + ಲ) + 3ಋರಲ(ಅಯ + ಲ) ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$(\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^3 = \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮ}^3 + 3\text{ಪಬ}(\text{ಪ} + \text{ಬ})$

+ 3ಬಮ(ಬ + ಮ) + 3ಪಮ(ಪ + ಮ) + 3ಪಬಮ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ಇಲ್ಲವೆ ಅದರಂತೆಯೇ ಇರುವ . ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು. ಪ = ಅಯ, ಬ = ಋರ, ಮತ್ತು ಮ = ಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ} + \text{ಲ})^3 = (\text{ಅಯ})^3 + (\text{ಋರ})^3 + (\text{ಲ})^3 + 3 \cdot \text{ಅಯ} \cdot \text{ಋರ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ})$

$+ 3 \cdot \text{ಋರಲ}(\text{ಋರ} + \text{ಲ}) + 3 \cdot \text{ಅಯ} \cdot \text{ಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ}) + 3 \cdot \text{ಅಯ} \cdot \text{ಋರಲ}$

$= \text{ಅಯ}^3 + 3\text{ಅಯ}^2\text{ಋರ} + \text{ಲ}^3 + 3\text{ಅಯಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಋರ}) + 3\text{ಋರಲ}(\text{ಋರ} + \text{ಲ})$

$+ 3\text{ಅಯಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ}) + 3\text{ಋರಲ}(\text{ಅಯ} + \text{ಲ}).$

ಉ. ೨. ಋಕ - ಳಗ + ಅಘ ಇದರ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಋಕ - ಳಗ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$(\text{ಋಕ} - \text{ಳಗ} + \text{ಅಘ})^3 = (\text{ಅ} + \text{ಅಘ})^3$

$$\begin{aligned}
 &= ಅ^2 + ಲಘ^2 + ಓಘ^2 (ಅ + ಲಘ) \\
 &= (ಅ - ಲಘ)^2 + ಲಘ^2 + ಓಘ^2 (ಅ - ಲಘ)(ಅ - ಲಘ + ಲಘ) [\because ಅ = ಅ - ಲಘ] \\
 &= ಅ^2 - ೨ಅಲಘ + ಲಘ^2 - ೨ಅಲಘ (ಅ - ಲಘ) + ಲಘ^2 + ಲಘ^2 (ಅ - ಲಘ + ಲಘ) \\
 &\quad - ೨ಲಘಘ^2 (ಅ - ಲಘ + ಲಘ) \\
 &= ಅ^2 - ೨ಅಲಘ + ಲಘ^2 - ೨ಅಲಘ (ಅ - ಲಘ) + ಲಘ^2 (ಅ + ಲಘ) \\
 &\quad - ೨ಲಘಘ^2 - ೨ಲಘಘ^2 (-ಲಘ + ಲಘ) - ೨ಲಘಘ^2 \\
 &= ಅ^2 - ೨ಅಲಘ + ಲಘ^2 - ೨ಅಲಘ (ಅ - ಲಘ) + ಲಘ^2 (ಅ + ಲಘ) \\
 &\quad + ೨ಲಘಘ^2 (ಲಘ - ಲಘ) - ೧ಲಘಘ^2.
 \end{aligned}$$

ಪ = ಅ, ಲ = -ಲಘ, ಮತ್ತು ಮ = ಲಘ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಮುಂದಿನಂತೆ
 $(ಪ + ಲ + ಮ)^2 = ಪ^2 + ಲ^2 + ಮ^2 + ೨ಪಲ (ಪ + ಲ) + ೨ಲಮ (ಲ + ಮ)$
 $+ ೨ಪಮ (ಪ + ಮ) + ೨ಪಲಮ$ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನಾದರೂ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$$\begin{aligned}
 &(ಅ - ಲಘ + ಲಘ)^2 \\
 &= (ಅ)^2 + (-ಲಘ)^2 + (ಲಘ)^2 + ೨(ಅ)(-ಲಘ)(ಅ - ಲಘ) \\
 &\quad + ೨(-ಲಘ)(ಲಘ)(-ಲಘ + ಲಘ) + ೨(ಅ)(ಲಘ)(ಅ + ಲಘ) \\
 &\quad + ೨(ಅ)(-ಲಘ)(ಲಘ) \\
 &= ಅ^2 - ೨ಅಲಘ + ಲಘ^2 - ೨ಅಲಘ (ಅ - ಲಘ) - ೨ಲಘಘ^2 (-ಲಘ + ಲಘ) \\
 &\quad + ೧ಲಘಘ^2 (ಅ + ಲಘ) - ೧ಲಘಘ^2 \\
 &= ಅ^2 - ೨ಅಲಘ + ಲಘ^2 - ೨ಅಲಘ (ಅ - ಲಘ) + ೨ಲಘಘ^2 (ಲಘ - ಲಘ) \\
 &\quad + ೧ಲಘಘ^2 (ಅ + ಲಘ) - ೧ಲಘಘ^2.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೩. ಲಯ - ೩ರ - ೫ಲ ಇದರ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
 ಮೇಲೆ ಉ. ೧ ಮತ್ತು ೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಈ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಹಿಡಿದು ಮೂಲ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು ನೋಡಲು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಿ ತರುವಾಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದೆ. ಮೂರು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯುವ ರೂಢಿಯು ಸಾಕಷ್ಟು ಆದ ತರುವಾಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿವರ್ಣದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯೆನಿಸಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ನೋಡಲಿನ ಎರಡು ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಒಮ್ಮೆಲೆ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲು ಬರುವದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
& (\text{ಅಯ-೩ರ-ಇಲ})^2 = \{ (\text{ಅಯ-೩ರ})-\text{ಇಲ} \}^2 \\
& = (\text{ಅಯ} - ೩ರ)^2 - ೧೨ಇಲ^2 - ೩(\text{ಅಯ-೩ರ}) \times ಇಲ \{ (\text{ಅಯ-೩ರ})-\text{ಇಲ} \} \\
& = ೬ಅಯ^2 - ೨೭ರ^2 - ೩೬ಯರ (\text{ಅಯ-೩ರ}) - ೧೨ಇಲ^2 \\
& \quad - ೧೨ಇಲ(\text{ಅಯ-೩ರ})(\text{ಅಯ-೩ರ-ಇಲ}) \\
& = ೬ಅಯ^2 - ೨೭ರ^2 - ೧೨ಇಲ^2 - ೩೬ಯರ(\text{ಅಯ-೩ರ}) \\
& \quad - ೬೦ಯಲ (\text{ಅಯ-೩ರ-ಇಲ}) + ೩೬ಯರಲ(\text{ಅಯ-೩ರ-ಇಲ}) \\
& = ೬ಅಯ^2 - ೨೭ರ^2 - ೧೨ಇಲ^2 - ೩೬ಯರ (\text{ಅಯ-೩ರ}) \\
& \quad - ೬೦ಯಲ(\text{ಅಯ-ಇಲ}) + ೧೨೦ಯರಲ + ೩೬ಯರಲ(-೩ರ-ಇಲ) + ೧೨೦ಯರಲ \\
& = ೬ಅಯ^2 - ೨೭ರ^2 - ೧೨ಇಲ^2 - ೩೬ಯರ(\text{ಅಯ-೩ರ}) \\
& \quad - ೬೦ಯಲ(\text{ಅಯ-ಇಲ}) - ೩೬ಯರಲ(೩ರ+ಇಲ) + ೩೬೦ಯರಲ.
\end{aligned}$$

ಪ=ಅಯ, ಬ=೩ರ, ಮತ್ತು ಮ= -ಇಲ ಹಿಡಿದರೆ (ಪ+ಬ+ಮ)^2 = ಪ^2 + ಬ^2 + ಮ^2 + ೨ಪಬ(ಪ+ಬ) + ೨ಬಮ(ಬ+ಮ) + ೨ಪಮ(ಪ+ಮ) + ೬ಪಬಮ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಹ ಮುಂದಿನಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$$\begin{aligned}
& = (\text{ಅಯ})^2 + (-೩ರ)^2 + (-ಇಲ)^2 + ೨(\text{ಅಯ})(-೩ರ) (\text{ಅಯ-೩ರ}) + ೨(-೩ರ) \\
& \quad (-ಇಲ)(-೩ರ-ಇಲ) + ೨(\text{ಅಯ})(-ಇಲ)(\text{ಅಯ-ಇಲ}) + ೬(\text{ಅಯ})(-೩ರ)(-ಇಲ) \\
& = ೬ಅಯ^2 - ೨೭ರ^2 - ೧೨ಇಲ^2 - ೩೬ಯರ(\text{ಅಯ-೩ರ}) - ೩೬ಯರಲ(೩ರ+ಇಲ) \\
& \quad - ೬೦ಯಲ (\text{ಅಯ-ಇಲ}) + ೩೬೦ಯರಲ.
\end{aligned}$$

ಉ. ೪. ಕ-೩ಗ+ಅಘ-ಇ ಈ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned}
& (\text{ಕ-೩ಗ+ಅಘ-ಇ})^2 = \{ (\text{ಕ-೩ಗ})+(\text{ಅಘ-ಇ}) \}^2 \\
& = (\text{ಕ-೩ಗ})^2 + (\text{ಅಘ-ಇ})^2 + ೨(\text{ಕ-೩ಗ})(\text{ಅಘ-ಇ})(\text{ಕ-೩ಗ+ಅಘ-ಇ}) \\
& = ಕ^2 - ೨೭ಗ^2 - ೯ಕಗ(\text{ಕ-೩ಗ}) + ೬ಅಘ^2 - ೧೨ಇ - ೬೦ಘ(\text{ಅಘ-ಇ}) \\
& \quad + ೩(ಅಘ-೧೨ಕಘ-ಇಕ+ಇಗ)(\text{ಕ-೩ಗ+ಅಘ-ಇ}) \\
& = ಕ^2 - ೨೭ಗ^2 + ೬ಅಘ^2 - ೧೨ಇ - ೯ಕಗ(\text{ಕ-೩ಗ}) + ೧೨ಕಘ(\text{ಕ+ಅಘ}) \\
& \quad + ೧೨ಕಘ(-೩ಗ-ಇ) - ೧೨ಕ(\text{ಕ-ಇ}) - ೧೨ಕ(-೩ಗ+ಅಘ) \\
& \quad - ೩೬ಗಘ(-೩ಗ+ಅಘ) - ೩೬ಗಘ(\text{ಕ-ಇ}) + ೩೬ಗಘ(-೩ಗ-ಇ) + ೩೬ಗಘ(\text{ಕ+ಅಘ}) \\
& \quad - ೬೦ಘ(\text{ಅಘ-ಇ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ಕ^2 - ೨೭ಗ^2 + ೬೪ಘ^2 - ೯ಕಗ(ಕ - ೩ಗ) + ೧೨ಕಘ(ಕ + ೪ಘ) \\
 &+ ೩೬ಗಘ(೩ಗ - ೪ಘ) - ೧೫ಕ(ಕ - ೫) - ೪೫ಗ(೩ಗ + ೫) - ೬೦ಘ(೪ಘ - ೫) \\
 &\quad - ೭೨ಕಗಘ + ೯೦ಕಗ - ೧೨೦ಕಘ + ೩೬೦ಗಘ - ೧೨೫ \\
 &= ಕ^2 - ೨೭ಗ^2 + ೬೪ಘ^2 - ೯ಕಗ(ಕ - ೩ಗ) + ೧೨ಕಘ(ಕ + ೪ಘ) \\
 &+ ೩೬ಗಘ(೩ಗ - ೪ಘ) - ೭೨ಕಗಘ - ೧೫ಕ - ೧೫೫ಗ - ೨೪೦ಘ + ೯೦ಕಗ \\
 &\quad - ೧೨೦ಕಘ + ೩೬೦ಗಘ + ೭೫ಕ - ೨೫೫ಗ + ೩೦೦ಘ - ೧೨೫.
 \end{aligned}$$

ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಈ ವಿಸ್ತಾರವು ಸರಿ ಇರುವದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಲು ಬರುವದು. ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಉತ್ಸಾಹ ಇರುವವರು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು. ಗುಣಾಕಾರದ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜ್ಜ್ವಲ-ಯಾದರೂ ಆಗುವದು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೭.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------|
| ೧. ಕ-ಗ+ಘ. | ೨. ತ-ದ-ನ. | ೩. ೨ಕ+೩ಗ-ಘ. |
| ೪. ೫ಕ-೩ಗ-೨ಘ. | ೫. ೨ತ-೫ದ+೩ನ. | ೬. ೮ಪ-೭-೩ಮ. |
| ೭. ಪ-ಬ-೯ಮ. | ೮. ೨ಪ-೭+೬ಮ. | ೯. ೩ಕ-೭ಗ+೫. |
| ೧೦. ೧-೫ಪ+೬ಬ. | ೧೧. ಪ-ಪ+ಗ. | ೧೨. ೨ಪ-೪ಪ-೩. |
| ೧೩. ೨+೫ಪ-ಪ. | ೧೪. ೩-೨ಪ-೪ಪ. | ೧೫. ಪ+ಪಬ-ಬ. |
| ೧೬. ೩ಪ-೨ಪಬ+ಬ. | ೧೭. ೪ತ-೨ತದ-೩ದ. | ೧೮. ಪ+೩ಪ+ಗ. |
| ೧೯. ೨ಪ-೪ಪ-೩. | ೨೦. ೪ಕ-೨ಕ+೩. | ೨೧. ೨ಕ-೩ಕ-೧. |
| ೨೨. ೫-೨ಪ+೩ಪ. | ೨೩. ೨ಪ+ಪಬ+೪ಬ. | |
| ೨೪. ಯ-೨ಯಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ. | | |

ಆರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ

೬.೧. ಯಾವದೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಯವಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ, ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದೆ. ಅಂದರೆಯೇ ೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವು ೬ರ ಅವಯವಗಳಿವೆ. ೩೦ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨, ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದೆ, ಅಂದರೆಯೇ ೨, ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವು ೩೦ರ ಅವಯವಗಳಿವೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಕಗ ದ ಅವಯವಗಳು ಕ ಮತ್ತು ಗ, ಕಗಘ ದವು ಕ, ಗ ಮತ್ತು ಘ, ೩೫ ಕಗಘ ದವು ೫, ೭, ಕ, ಗ, ಮತ್ತು ಘ.

ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಯವವು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಅವಯವವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ ಎರಡನೇ ಅವಯವವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಬರುವದು.

ಅವಯವ ಈ ಶಬ್ದದಂತೆಯೇ ಅದೇ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ **ಗುಣ**, **ಗುಣಕ** ಈ ಶಬ್ದಗಳನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. **ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವದು, ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವದು, ಇಲ್ಲವೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು, ಇವೆಲ್ಲವುಗಳ ಅರ್ಥವು ಒಂದೇ.**

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಂಥ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳುಳ್ಳ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವದೆಂಬುದರ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದೆ. 'ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಂಥ ರಾಶಿಗಳ' ಎಂದೆನ್ನುವ ಉದ್ದೇಶವೇನೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂದಲ್ಲ, ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ರೀತಿಯು ಇರುವಂತೆ, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವದೇ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವಂತೆ, ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ-

ವನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ರೀತಿಯು ಇಲ್ಲ. ಇದಲ್ಲದೇ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಎಂತಲೂ ಇಲ್ಲ.

೧.

ಅಯ + ಅಕ್ಷ

೬.೨. ನಾವು ಮೊದಲು ಅಯ + ಅಕ್ಷ ಈ ಮಾದರಿಯ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಅಯ ಅಂದರೆ ಅ ಗುಣಲೇಯ, ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಅಂದರೆ ಅ ಗುಣಲೇ ಕ್ಷ. ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವದೆಂದರೆ, ಅ ಮತ್ತು ಯ ಇವು ಅಯ ದ ಗುಣಕಗಳಿವೆ, ಮತ್ತು ಅ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವು ಅಕ್ಷ ದ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ಅಂದರೆ ಅ ಈ ಗುಣಕವು ಅಯ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಈ ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಇರುವದು. ಈಗ ಅ ದಿಂದ ಯ ಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಅ ದಿಂದ ಕ್ಷ ಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಅ ದಿಂದ ಯ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ (ಯ + ಕ್ಷ ಕ್ಕೆ) ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$೨.೫ + ೨.೭ = ೧೫ + ೨೦ = ೩೫; \quad ೨(೫ + ೭) = ೨.೧೨ = ೩೬.$$

$$\therefore ೨.೫ + ೨.೭ = ೨(೫ + ೭).$$

ಒಂದು ವರ್ಗದ ತಿಂಗಳ ಫೀಯು ಮೂರು ರೂಪಾಯಿ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಮೊದಲನೆಯ ದಿನ ಐದು ಹುಡುಗರು ಫೀಯನ್ನು ತಂದು ಕೊಟ್ಟರು. ಅದು ೨×೫ ಅಂದರೆ ೧೫ ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವದು. ಎರಡನೆಯ ದಿನ ಮತ್ತೆ ಏಳು ಹುಡುಗರು ತಂದುಕೊಟ್ಟರು. ಅದು ೨×೭ ಅಂದರೆ ೧೪ ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವದು. ಒಟ್ಟು ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ೩೫ ರೂಪಾಯಿ ಫೀ ಜಮೆ ಆಯಿತು. $೫ + ೭$ ಅಂದರೆ ೧೨ ಹುಡುಗರೂ ಫೀಯನ್ನು ಒಂದೇ ದಿನ ತಂದುಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದು $೨(೫ + ೭)$ ಅಂದರೆ ೨×೧೨ ಅಂದರೆ ೩೬ ರೂಪಾಯಿಗಳೇ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಇದರಂತೆಯೇ, ಅಯ + ಅಕ್ಷ = ಅ (ಯ + ಕ್ಷ).

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಗುಣಕವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಪದಗಳುಳ್ಳ ಯಾವ-
ದೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅ

ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ಮುಂದೆ ಕಂಪಿಸೋಳಗೆ ಆ ಪದಗಳ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಚಿಹ್ನೆ ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆದರಾಯಿತು. ಈ ಉಳಿದ ಅವಯವಗಳು ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವವು. ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರೆದಿದ್ದರೆ. ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವವು. ಯಾವದೇ ರಾಶಿಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಅವಯವದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ಅವಯವವು ಸಿಗುವದು. ಭಾಗಲಬ್ಧವೇ ಆ ಎರಡನೇ ಅವಯವವು. ಮೇಲಿನ ಸಂಗತಿಯು ನಮಗೆ ಮುಂದಿನಂತೆಯೂ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆ ವಾರು ಅಗಲವಿರುವ ಮತ್ತು ಯ ವಾರು ಹಾಗು ಕ್ಷ ವಾರು ಉದ್ದಳತೆಯುಳ್ಳ ಎರಡು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಭೂಭಾಗಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹತ್ತಿಕೊಂಡು ಇದ್ದು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಮೊದಲನೆಯದು ರಾಮರಾಯರದಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ಕೃಷ್ಣರಾಯರದಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆಯ ಚೌ. ವಾ. ಇದ್ದು ಎರಡನೆಯದರದು ಅಕ್ಷ ಚೌ. ವಾ. ಇದೆ. ಕೆಲಕಾಲದ ತರುವಾಯ ರಾಮರಾಯರು ಕೃಷ್ಣರಾಯರಿಂದ ಅವರ ಭೂಭಾಗವನ್ನು ಕೊಂಡರು, ಮತ್ತು ನಡುವಿನ ಬೇಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದೇ ಭಾಗವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಯ + ಕ್ಷ) ವಾರು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯ ಆ ವಾರು ಇದ್ದು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆ(ಯ+ಕ್ಷ) ಚೌ. ವಾರು ಇರುವದು. ಅಂದರೆಯೇ,

$$\text{ಅಯ} + \text{ಅಕ್ಷ} = \text{ಅ(ಯ + ಕ್ಷ)}.$$

ಇದಲ್ಲದೇ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡುವಾ. ಬಲಬದಿಯ ರಾಶಿಯು ಆ(ಯ+ಕ್ಷ) ಇರುವದು. ಅದರ ಕಂಪವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ನಾವು ಅದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದರೆ ಆ ವಿಸ್ತಾರವು ಅಯ + ಅಕ್ಷ ಇದೇ ಇರುವದು.

೬.೩. ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಮಾತೇ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯದು ಇಲ್ಲವೆ ಬಹುಪದ ರಾಶಿಯದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನಾವು ಅಯ + ಆರ + ಅಕ್ಷ ಈ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂರೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ಆ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಈಗ ಆ ದಿಂದ ಯಕ್ಕೆ, ರಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಆ ದಿಂದ ಯ, ರ

ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ (ಯ + ರ + ಕ್ಷ ಕೈ) ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನು ೩ ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಐದು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟು ಫೀ, ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟು ಫೀ ಮತ್ತು ಏಳು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟು ಫೀ, ಈ ಎಲ್ಲ ರಕಮುಗಳ ಬೇರೀಜು ಐದು + ನಾಲ್ಕು + ಏಳು ಅಂದರೆ ಹದಿನಾರು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟು ಫೀಯಷ್ಟು ಇರುವದು.

$$೩.೫+೩.೪+೩.೩=೧೫+೧೨+೯=೩೪; ೩(೫+೪+೩)=೩.೧೬=೩೪.$$

$$\therefore ೩.೫ + ೩.೪ + ೩.೩ = ೩(೫ + ೪ + ೩).$$

ಇದರಂತೆಯೇ, ಅಯ + ಅರ + ಅಕ್ಷ = ಅ(ಯ + ರ + ಕ್ಷ).

ಮೇಲಿನಂತೆ ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡುವಾ. ಬಲ-ಬದಿಯ ರಾಶಿಯು ಅ(ಯ + ರ + ಕ್ಷ) ಇದೆ. ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆದರೆ ಅದು ಅಯ + ಅರ + ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಇರುವದು.

೬.೪. ಈಗ ನಾವು ಅಯ + ಅರ + ಅಲ + ಅವ + ಅಕ್ಷ ದಂಥ ಒಂದು ಬಹುಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಈ ರಾಶಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಅ ದಿಂದ ಯ, ರ, ಲ, ವ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳಿಗೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅ ದಿಂದ ಯ, ರ, ಲ, ವ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಅಂದರೆ (ಯ + ರ + ಲ + ವ + ಕ್ಷ ಕೈ) ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ತರದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಇಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$೩.೫+೩.೪+೩.೮+೩.೬+೩.೩=೧೫+೧೨+೨೪+೧೮+೯=೯೦;$$

$$೩(೫+೪+೮+೬+೩)=೩.೩೦=೯೦.$$

$$\therefore ೩.೫ + ೩.೪ + ೩.೮ + ೩.೬ + ೩.೩ = ೩(೫ + ೪ + ೮ + ೬ + ೩).$$

ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಅಯ+ಅರ+ಅಲ+ಅವ+ಅಕ್ಷ=ಅ(ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷ).

ನಾವು ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಹ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅ ವಾರು ಅಗಲಿರುವ ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ ವಾರು, ರ ವಾರು, ಲ ವಾರು, ವ ವಾರು ಮತ್ತು ಕ್ಷ ವಾರು ಉದ್ಭವಿರುವ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಐದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಭೂಭಾಗಗಳು

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಐದು ಜನರ ಒಡೆತನದಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಯ ಚೌ. ವಾ. ಅರ ಚೌ. ವಾ., ಅಲ ಚೌ. ವಾ., ಅವ ಚೌ. ವಾ. ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಚೌ. ವಾ. ಇರುವವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ಐದು ಜನರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನು ಉಳಿದ ನಾಲ್ವರ ಕಡೆಯಿಂದ ಅವರ ಭೂಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡರೆ ಮತ್ತು ಅವರ ಒಡೆತನವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ನಡುವಿನ ಬೇಲಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಐದೂ ಭೂಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ತಾಗಿರುವ ಒಂದೇ ಹೊಲವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಆ ವಾರು ಅಗಲವಿದ್ದು (ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷ) ವಾರು ಉದ್ದವಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆ (ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷ) ಚೌ. ವಾ. ಇರುವದು. ಈಗ ಈ ಒಂದೇ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಯ ಚೌ. ವಾ., ಅರ ಚೌ. ವಾ., ಅಲ ಚೌ. ವಾ., ಅವ ಚೌ. ವಾ. ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಚೌ. ವಾ., ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳಿರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಐದು ಭೂಭಾಗಗಳಿಂದೊಡಗೂಡಿದ್ದು ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಅಯ+ಅರ+ಅಲ+ಅವ+ಅಕ್ಷ=ಆ (ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷ).

೭.೫. ಈಗ ದಪ - ದಬ ಇಂಥ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಗುಣಸೃಢ-ಕೃರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಬದಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯ ಪ ವಾರು ಉದ್ದವಿರುವ ಮತ್ತು ದ ವಾರು ಅಗಲವಿರುವ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ಸಹಜವಾಗಿ ದಪ ಚೌ. ವಾ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಭೂಭಾಗವು ನಮ್ಮ ಒಡೆತನದಲ್ಲಿರುವದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಅದರೊಳಗಿಂದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ

← - - - ಪ ವಾರ - - - →	
ಪ - ಬ ವಾರ	ಬ ವಾರ
ದ(ಪ - ಬ) ಚೌ. ವಾರ	ದ ಬ ಚೌ. ವಾರ

ಆಕೃತಿ ೧.

ಬ ವಾರು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಬೇರೆನಾಡಿ ಮನೆ ಕಟ್ಟುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಮ್ಮ ಒಬ್ಬ ಮಿತ್ರನಿಗೆ ಕೊಡುವೆವು. ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ದಬ ಚೌ. ವಾ. ಇರುವದು. ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಮೇಲೆ ನಮ್ಮ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಉಳಿಯುವ ಭೂಮಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ದಪ - ದಬ ಚೌ. ವಾ. ಇರುವದು. ಆದರೆ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಈ ಭೂಭಾಗದ

ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ - ಬ) ನಾರು ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ದ ನಾರು ಇರುವದು ಮತ್ತು ಈ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ದ (ಪ - ಬ) ಚೌ. ನಾ. ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\text{ದಪ} - \text{ದಬ} = \text{ದ} (\text{ಪ} - \text{ಬ}).$$

ಇದಲ್ಲದೇ ದ (ಪ - ಬ) ಈ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆದರೆ ಅದು ದಪ - ದಬ ದಷ್ಟು ಆಗುವದು. ಸಹಜ-
ವಾಗಿಯೇ ದಪ - ದಬ = ದ (ಪ - ಬ).

ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆಯೂ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನು ತನ್ನ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ದ ರೂ. ದಿನಗೂಲಿ-
ಯಂತೆ ಪ ಜನರನ್ನು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿರುವನೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ದಿನಾಲು ಸಾಯಂಕಾಲದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವು ಮುಗಿದ ಕೂಡಲೆ ಅವರಿಗೆ ದಪ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುವದು. ಒಂದು ದಿನ ಯಾವದೇ ಕಾರಣದಿಂದ ಬ ಜನರು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬರದಿದ್ದರೆ ಅವರಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವ ದಬ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಆ ದಿನವ ಕೊಡಬೇಕಾಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಆ ದಿನ ಕೇವಲ (ದಪ - ದಬ) ರೂಪಾಯಿಗಳು ಖರ್ಚಾಗುವವು. ಬೇರೆ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ಆ ದಿನ ಕೇವಲ (ಪ - ಬ) ಜನರೇ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬಂದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ದಿನಗೂಲಿಯ ದರವು ದ ರೂಪಾಯಿ ಇರುವದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ದಿನಗೂಲಿಯು ದ (ಪ - ಬ) ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಅನುಮಾನವು ಹೊರಡುವದು. ದಪ - ದಬ = ದ (ಪ - ಬ).

ಈ ಸಂಗತಿಯ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉದಾ-
ಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹ ಮನಗಾಣಿಸಿಕೊಡಲು ಬರುವದು; ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$\begin{aligned} ೫. ೧೭ - ೫. ೧೨ &= ೮೫ - ೬೦ = ೨೫; & ೫ (೧೭ - ೧೨) &= ೫. ೫ = ೨೫. \\ ೧೨. ೧೬ - ೧೨. ೯ &= ೧೯೨ - ೧೦೮ = ೮೪; & ೧೨ (೧೬ - ೯) &= ೧೨. ೭ = ೮೪. \end{aligned}$$

೬. ೬. ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿಷ್ಕರ್ಷವು ಹೊರಡುವದು. ಯಾವದೊಂದು ಗುಣಕವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಪದಗಳುಳ್ಳ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯು (ಆ ರಾಶಿಯು ದ್ವಿಪದವಿರಲಿ, ತ್ರಿಪದ-

ವಿರಲಿ, ಇಲ್ಲವೆ ಬಹುಪದವಿರಲಿ) ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವ-
ದಾದರೆ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ಅದರ ಮುಂದೆ
ಕಂಪಿನಲ್ಲಿ ಆ ಪದಗಳ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಚಿಹ್ನೆ
ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆದರಾಯಿತು.

ಇಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಾದ ಈ ಹೊಸ ಸಂಗತಿಯು ಬೇಗನೇ ಗುಣಿಸುವ
ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಸಲ ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು
ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} ೩೬ \times ೮೨ + ೩೬ + ೧೧೮ &= ೩೬ (೮೨ + ೧೧೮) = ೩೬ \times ೨೦೦ = ೭೨೦೦, \\ ೫೮ \times ೨೨೮ - ೫೮ \times ೧೭೮ &= ೫೮ (೨೨೮ - ೧೭೮) = ೫೮ \times ೫೦ = ೨೯೦೦, \\ ೪೮ \times ೫೨ + ೪೮ \times ೧೩೩ + ೪೮ \times ೬೫ &= ೪೮ (೫೨ + ೧೩೩ + ೬೫) \\ &= ೪೮ \times ೨೫೦ = ೧೨೦೦೦, \end{aligned}$$

$$೬೨ \times ೬೪ - ೬೨ \times ೪೭ + ೬೨ \times ೪೩ = ೬೨ (೬೪ - ೪೭ + ೪೩) = ೬೨ \times ೬೦ = ೩೭೨೦.$$

೬.೭. ಈಗ ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆ-
ಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸೋಣ.

$$\text{ಉ. ೧. } ೪ಯ + ೪ಕ್ಷ = ೪ (ಯ + ಕ್ಷ). \quad \text{ಉ. ೨. } ೫ಯ + ೫ಕ್ಷ = ೫ (ಯ + ೫ಕ್ಷ).$$

$$\text{ಉ. ೩. } ೬ಪ - ೬ಬ = ೬ (ಪ - ಬ). \quad \text{ಉ. ೪. } ೭ಪ - ೭ಖಬ = ೭ (ಪ - ೫ಬ).$$

$$\text{ಉ. ೫. } ೮ಯ + ೮ = ೮ (ಯ + ೧). \quad \text{ಉ. ೬. } ೯ಯ - ೯ = ೯ (ಯ - ೧).$$

$$\text{ಉ. ೭. } ೧೨ಕ್ಷ + ೪೮ = ೧೨ (ಕ್ಷ + ೪). \quad \text{ಉ. ೮. } ೧೫ಮ - ೯೦ = ೧೫ (ಮ - ೬).$$

$$\text{ಉ. ೯. } ೨ಮ + ೨ರ + ೨ಲ = ೨ (ಮ + ರ + ಲ).$$

$$\text{ಉ. ೧೦. } ೪ಯ + ೧೨ಬ + ೧೬ಮ = ೪ (ಯ + ೩ಬ + ೪ಮ).$$

$$\text{ಉ. ೧೧. } ೩ಯ - ೩ರ + ೩ಲ = ೩ (ಯ - ರ + ಲ).$$

$$\text{ಉ. ೧೨. } ೩ಯ - ೯ರ - ೧೨ಲ + ೨೧ವ = ೩ (ಯ - ೩ರ - ೪ಲ + ೭ವ).$$

$$\text{ಉ. ೧೩. } ೧೫ಪ - ೨೫ಫ + ೩೫ಬ - ೪೦ಭ - ೧೦ಮ$$

$$= ೫ (೩ಪ - ೫ಫ + ೭ಬ - ೮ಭ - ೨ಮ).$$

$$\text{ಉ. ೧೪. } ೨ಕಪ - ೮ಕಬ + ೧೨ಕಭ - ೨೦ಕಮ = ೨ಕ (ಪ - ೪ಬ + ೬ಭ - ೧೦ಮ).$$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಎಲ್ಲ
ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆದು

ಮುಂದೆ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದೊಳಗಿನ ಉಳಿದ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೂಲ ಚಿಹ್ನೆ ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆದಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಎಲ್ಲವುಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಉ. ೭. ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ೧೨ಕ್ಷ+೪೮ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೨, ೩, ೪, ೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ೧೨ (ಕ್ಷ+೪) ಇದರಂತೆಯೇ ೨ (೬ಕ್ಷ+೨೪) ಹೀಗೆ, ಇಲ್ಲವೆ ೩ (೪ಕ್ಷ+೧೬) ಹೀಗೆ, ಇಲ್ಲವೆ ೪ (೩ಕ್ಷ+೧೨) ಹೀಗೆ, ಇಲ್ಲವೆ ೬ (೨ಕ್ಷ+೮) ಹೀಗೂ ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಕೊನೆಯ ನಾಲ್ಕು ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿಯ ಕಂಸ-ಗಳೊಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೬, ೪, ೩, ೨, ಈ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು ಉಳಿಯುವವು ಮತ್ತು ನಾವು ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಹೀಗೆ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹಿಂದೆ ಉಳಿಯಗೊಡಬಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ತರುವಾಯ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದ ಉಳಿದ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೂಲ ಚಿಹ್ನೆ ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆಯುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಉ. ೧೪ ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳೊಳಗೆ ೨ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ, ೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ೨೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಮೂರರಲ್ಲಿ ೨೩ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ತರುವಾಯ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ: (ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದಲೇ ಬಿಡಿಸಲು ಬರಬಹುದು.)

೧. ೫ಯ+೫ಕ್ಷ. ೨. ೭ಪ+೭ಮ. ೩. ೮ಕ+೮ಗ. ೪. ೧೨ರ+೧೨ಲ. ೫. ೨ಪ-೨ಬ. ೬. ೯ಪ-೯ಮ. ೭. ೧೧ಯ-೧೧ಕ್ಷ. ೮. ೨ಯ+೪ಕ್ಷ.

೯. ಒಯ-ಒಪ. ೧೦. ಒಕ-೧ಳಗ. ೧೧. ಲಯ+ಅಳಕ್ಷ. ೧೨. ಲಯ-ಒಒಕ್ಷ.
 ೧೩. ಲಪ+ಒಬ. ೧೪. ಲಬ-೧ಳಮ. ೧೫. ಲಕ-೧ಳಗ. ೧೬. ಲಯ+ಅಳಕ್ಷ.
 ೧೭. ಲಪ-೧ಳಮ. ೧೮. ಲಕ+೧ಳಗ. ೧೯. ಲಪ+ಅಳಬ.
 ೨೦. ಒಳಯ-ಒಒಕ್ಷ. ೨೧. ಲಯ-ಳ. ೨೨. ಲಯ+ಲ. ೨೩. ೧೨+ಅಳಮ.
 ೨೪. ಒಒ - ಲಳನ. ೨೫. ಲಯ+ಅಳಕ್ಷ. ೨೬. ಲಯ - ಲಳರ.
 ೨೭. ಒಯ+ಅಳಕ್ಷ. ೨೮. ಲಪ-ಅಳಬ. ೨೯. ಲಕಗಯ+ಲಕಗಕ್ಷ.
 ೩೦. ಒಕಗಬ+೧ಕಗಮ. ೩೧. ಒಕಗಯ - ಲಕಗಕ್ಷ.
 ೩೨. ಲಪಬಮ - ಲಪಮಯ. ೩೩. ಒಯ+ಒರ+ಒಲ.
 ೩೪. ಲಯ-ಲರ+ಲಕ್ಷ. ೩೫. ಲಯ+ಲಲ-ಳಕ್ಷ. ೩೬. ಲಪ-ಲಬ-ಲಮ.
 ೩೭. ಲಪ+ಲಬ+ಒಮ. ೩೮. ಒಕ+ಲಗ+ಒಫ. ೩೯. ಲಯ+೧ಲ+ಅಳಕ್ಷ.
 ೪೦. ಲತ - ಲದ+೧ಳನ. ೪೧. ಲಪ - ಲಬ+ಅಳಮ.
 ೪೨. ಲಯ - ಲರ - ಒಕ್ಷ. ೪೩. ಒಒಕ - ಲಳಬ+೧ಳಗ.
 ೪೪. ಲತ+೧ದ - ಲಳನ. ೪೫. ಒಯ+ಒರ+ಒಲ.
 ೪೬. ಲಕಪ - ಲಕಬ+ಳಮ. ೪೭. ಒಗಯ+ಒಗರ - ಒಗಕ್ಷ.
 ೪೮. ಲಕನ - ಲಕಪ - ಲಕಮ. ೪೯. ಲಯ+೧ಲರ+ಅಳಲ.
 ೫೦. ಲಕಪ-ಲಕಬ+ಅಳಮ. ೫೧. ಲನಪ-ಒನಬ-ಒನಮ.
 ೫೨. ಒಕಯ+ಲಗಯ+೧ಬಯ. ೫೩. ಒಕಕ್ಷ-ಲಗಕ್ಷ+ಒಪಕ್ಷ.
 ೫೪. ಒಕಮಯ - ಒಕಪಲ+ಲಕಪಕ್ಷ.
 ೫೫. ಅಳಯಕ್ಷ-ಲಳಗಯಕ್ಷ-ಒಬಯಕ್ಷ.
 ೫೬. ಒಯ - ಲರ+೧ಲ - ಒಕ್ಷ.
 ೫೭. ಲಯ - ಲರ - ಒಲ+ಒವ - ಒಕ್ಷ.
 ೫೮. ಲಕಪ - ಲಗಫ - ಲಫಬ+೧ಲಮ.
 ೫೯. ಲಕಯರ - ಲಗರಲ - ಲಫಲಯ.
 ೬೦. ಲಕಪಮ - ಲಗಪಮ+ಒ ಫಪಬರ - ಲತಪಬಕ್ಷ.
 ೬೧. ಒ - ಲಯ+ಲರ+ಒಲ - ಲಕ್ಷ.
 ೬೨. ಲ+ಒಕಯ - ಲಗರ - ಲಫವ+ಳಪಕ್ಷ.

೧೧. ಯೌರೌಕ್ಷ - ಯೌಕ್ಷೌ + ಯರೌಕ್ಷ.

೧೨. ಉಯೌಕ್ಷ - ೨೦ಯೌಕ್ಷೌ - ೧೨ಯೌಕ್ಷೌ.

೧೩. ೨೦ಯೌರೌಲೌ - ೪೦ಯೌರೌಲೌ + ೧೫ಯೌರೌಲೌ.

೧೪. ೨೪ಅಪಬೌ + ೧೨ಅಬಮೌ - ೨೨ಅನುಬೌ.

೬.೯. ಕ (ಪ + ಮ) + ಗ (ಪ + ಮ) ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯ-
ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡಿರಿ. ನಮಗೆ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡ-
ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನು
ತನ್ನೆಡೆಗೆ ಎಳೆದುಕೊಳ್ಳುವದು? ಕರ + ಗರ ಹೀಗೆ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ರ
ಇದು ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ಅದರ ಗುಣಪೃಥ-
ಕ್ಕರಣವನ್ನು ರ(ಕ + ಗ), ಹೀಗೆಯೇ ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದಿಲ್ಲವೇ? ಕೊಟ್ಟ
ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಪಿನೊಳಗಿದ್ದ ಪ + ಮ ಇದು ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು
ತನ್ನ ಕಡೆಗೆ ಎಳೆದುಕೊಂಡು ತಾನು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದೇನೆಂದು
ನಮಗೆ ಹೇಳುವದಿಲ್ಲವೇ? 'ಪ + ಮ' ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು 'ರ' ದಿಂದ
ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಅದೇ ರಾಶಿಯನ್ನು 'ಕರ + ಗರ' ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕಾ-
ಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲವೇ? ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅದನ್ನೇ ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ
ರ(ಕ + ಗ) ಹೀಗೆಯೇ ನಮಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದಿಲ್ಲವೇ? ಆದರೆ
ನಾವು 'ರ' ವನ್ನು 'ಪ + ಮ' ದ ಬದಲಾಗಿ ಬರೆದಿರುವೆವು. ಅಂದಮೇಲೆ
ಅದರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ 'ರ' ದ ಬದಲಾಗಿ 'ಪ + ಮ' ಬರೆದೊಡನೆಯೇ
(ಪ + ಮ)(ಕ + ಗ) ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಅದರ ರೂಪಾಂತರವಾಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲವೇ?
∴ ಕ(ಪ + ಮ) + ಗ(ಪ + ಮ) ≡ (ಪ + ಮ)(ಕ + ಗ).

ಅದರಂತೆಯೇ, ತ(ಪ + ಫ) + ದ(ಪ + ಫ) + ನ(ಪ + ಫ) ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ
ಅತಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವ 'ಪ + ಫ' ಈ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ
ತಿಗೆದರೆ,

ತ(ಪ + ಫ) + ದ(ಪ + ಫ) + ನ(ಪ + ಫ) ≡ (ಪ + ಫ)(ತ + ದ + ನ).
ಮತ್ತು ಇದರಂತೆಯೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ,

೨ಯ (೩ಯ - ೭) + ೫(೩ಯ - ೭) ≡ (೩ಯ - ೭)(೨ಯ + ೫) ಮತ್ತು
೬ಯ (೨ಯ - ೩) + ೨ಯ (೨ಯ - ೩) - ೨೫ (೨ಯ - ೩)
≡ (೨ಯ - ೩)(೬ಯ + ೨ಯ - ೨೫).

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ರಾಶಿಯುತ್ ಇಲ್ಲಿ ಬೇಕೆಂತಲೇ ಸಿಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನೆಳೆಯುವ ಉದ್ದೇಶ-
ವೇನೆಂದರೆ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿಮ್ಮ
ಕಣ್ಣೆದುರಿಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ನೀವು ದುರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಕೆಲಸವು
ವ್ಯರ್ಥವಾಗಿ ಬೆಳೆಯಬಾರದು. ತಾನು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದೇನೆಂದು ಒದ-
ಹೇಳುವ ಈ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವ* ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕದ ಕಡೆಗೆ ಹಲವು ಸಲ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಲಕ್ಷ್ಯವು ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಅವರು ಕಂಸವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ
ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ರಾಶಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆದು,
ತರುವಾಯ ವಿಸ್ತಾರದ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವರೆಂದು ಅನು-
ಭವಕ್ಕೆ ಬಂದಿದೆ. ಇಂಥ ಪ್ರಕಾರದ ಈ ದೀರ್ಘವಾದ ಮಾರ್ಗಕ್ಕೆ ಹಾಯ್ದ
ಸರಳವಾದ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಅವರು ಹೋಗಬೇಕೆಂಬ
ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಈ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣವನ್ನು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ :
(ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಿಮಗೆ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು
ಬರಬಹುದು).

೧. ಕ (೨ಯ + ೫ರ) + ಘ (೨ಯ + ೫ರ).
೨. ಋತ (೪ಯ - ೭ರ) + ೨ನ (೪ಯ - ೭ರ).
೩. ೨ಪ (೨ಯ + ೭ವ) - ೩ಮ (೨ಯ + ೭ವ).
೪. ಲಕ (೩ಪ - ೫ಮ) - ೩ಘ (೩ಪ - ೫ಮ).
೫. ಯ (ಯ - ೪ವ) + ವ (ಯ - ೪ವ).
೬. ೨ಯ (೫ಯ + ೪ರ) - ೭ರ (೫ಯ + ೪ರ).
೭. ೩ಯ (ಯ-೮) - ೧೧ (ಯ - ೮).
೮. ೧೨ (೮ - ೩ರ) + ೫ರ (೮ - ೩ರ).
೯. ದ (೨ಯ - ೫ರ) + ಧ (೨ಯ - ೫ರ) + ನ (೨ಯ - ೫ರ).
೧೦. ೨ದ (೪ಯ + ೭ವ) - ೫ಧ (೪ಯ + ೭ವ) + ೬ನ (೪ಯ + ೭ವ).

*ಈ ರೀತಿಯ ಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟ (ಮಾತಾಡುವ) ಗುಣಕಗಳು ಎಂದು
ಹೇಳುವದು ಯೋಗ್ಯವಾಗುವದು. ಮತ್ತು ಇನ್ನು ಮೇಲೆ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ
ಅವುಗಳನ್ನು ಇದೇ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗುವದು.

೧೦. ದ (೩ಪ + ೪ಫ - ೭ಮ) + ನ (೩ಪ + ೪ ಫ - ೭ಮ).

೧೧. ಜಿದೆ (೨ಪ - ೪ಫ - ೩ಮ) - ೭ನ (೨ಪ - ೪ಫ - ೩ಮ).

೧೨. ತ (ಯ + ರ - ವ) - ದ (ಯ + ರ - ವ) + ನ (ಯ + ರ - ವ).

೧೩. ಷತ (೨ಯ - ೪ರ - ೭ಲ) + ೭ದ (೨ಯ - ೪ರ - ೭ಲ)

- ೯ನ (೨ಯ - ೪ರ - ೭ಲ).

೧೪. ಓಯಿ (ಯ - ಷ) - ೯ಯರ (ಯ - ಷ) - ೪ರ (ಯ - ಷ).

೧೫. ಓಯಿ (೨ಯ - ೭) + ೭ಯರ (೨ಯ - ೭) - ೯ರ (೨ಯ - ೭).

೨.

ಪಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಯ + ಮಕ್ಷ

೭.೧೦. ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳಿದ್ದ ಪಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಯ + ಮಕ್ಷ ದಂಧ ರಾಶಿಗಳ ಕಡೆಗೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಟ್ಟರೆ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡುಬರುವದು. ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದ ಎರಡೆರಡು ಪದಗಳ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳು ಅದರಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಮತ್ತು ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣವೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಪಯ} + \text{ಪಕ್ಷ} + \text{ಮಯ} + \text{ಮಕ್ಷ} &\equiv \text{ಪ}(\text{ಯ} + \text{ಕ್ಷ}) + \text{ಮ}(\text{ಯ} + \text{ಕ್ಷ}) \\
 &\equiv \text{ಪವ} + \text{ಮವ}^* [\text{ಯ} + \text{ಕ್ಷ ವನ್ನು} \\
 &\quad \text{ವ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿ} \\
 &\equiv \text{ವ}(\text{ಪ} + \text{ಮ})^* \\
 &\equiv (\text{ಯ} + \text{ಕ್ಷ})(\text{ಪ} + \text{ಮ}) [\text{ವ ದ} \\
 &\quad \text{ಬದಲಾಗಿ ಪುನಃ ಯ + ಕ್ಷ ಬರೆದು}]
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳಲ್ಲಿ 'ಪ' ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿದ್ದು ಕೊನೆಯ ಎರಡರಲ್ಲಿ 'ಮ' ವು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

*ಈ ಹಂತಗಳು ಕಾಲುಗಾಡಿಯಂತೆ ಇರುವವು. ಕಾಲುಗಾಡಿಯ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೆ ನಡೆಯಲು ಬಂದ ಬಳಿಕ ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವದಿರುವದಿಲ್ಲ. ಅದರಂತೆಯೇ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮುಂದಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಬರುವಷ್ಟು ನಮ್ಮ ಸಿದ್ಧತೆಯಾದ ಬಳಿಕ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಾರದು.

ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲಿನ ಎರಡರ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡರ ಒಂದು ಗುಂಪು, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಆ ಎರಡೂ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವ (ಯ + ಕ್ಷ ಇದು) ಇದ್ದದ್ದಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿತು, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆಯಲಾಗಿ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೂಲರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳು ದೊರೆತವು.

ಪ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಮ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು, ಹೀಗೆಯೇ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಯ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಕ್ಷ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಬೇರೊಂದು ಗುಂಪು ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರಾಶಿಯ ಪುನರ್ವಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಯೂ ಸಹ ನಮಗೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅದರ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಪಯ} + \text{ಪಕ್ಷ} + \text{ಮಯ} + \text{ಮಕ್ಷ} &\equiv \text{ಪಯ} + \text{ಮಯ} + \text{ಪಕ್ಷ} + \text{ಮಕ್ಷ} \\
 &\equiv \text{ಯ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) + \text{ಕ್ಷ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) \\
 &\equiv \text{ಯಬ} + \text{ಕ್ಷಬ}^* [\text{ಪ} + \text{ಮ ವನ್ನು} \\
 &\quad \text{ಬ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿ} \\
 &\equiv \text{ಬ}(\text{ಯ} + \text{ಕ್ಷ})^* \\
 &\equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ})(\text{ಯ} + \text{ಕ್ಷ}) [\text{ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ} \\
 &\quad \text{ಪ} + \text{ಮ ಬರೆದು}
 \end{aligned}$$

೬.೧೧. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಆಕೃತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಬದಿಯ ೨ ಅ ಈ

ಪ ಇಂ	ಮ ಇಂ	ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content;"> <p>ಪಯ ಚೌ. ಇಂ.</p> </div>		(೧) ಪ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಯ ಇಂಚು
	ಮಯ ಚೌ. ಇಂ.	ಅಗಲ, (೨) ಮ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಯ ಇಂ. ಅಗಲ, (೩) ಪ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಕ್ಷ ಇಂಚು ಅಗಲವಿರುವ
ಪಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ.	ಮಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ.	ಮತ್ತು (೪) ಮ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಕ್ಷ ಇಂಚು ಅಗಲವಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಆಯ ತಾ ಕೃತಿ ಯ ಕಟ್ಟಿಗೆಯ

(ಪ+ಮ) ಇಂ

ಪಯ ಚೌ ಇಂ.	ಮಯ ಚೌ ಇಂ.
ಪಕ್ಷ ಚೌ ಇಂ.	ಮಕ್ಷ ಚೌ ಇಂ.

(ಚೌ
ಶಿಂ)

ಆ. ೨ ಆ

(ಪ+ಮ) (ಯ+ಕ್ಷ) ಚೌ ಇಂ.

ದಂತೆ ಒಂದೆಡೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಆ ಫಲಕದ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ+ಮ) ಇಂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು (ಯ+ಕ್ಷ) ಇಂ. ಆಗುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ+ಮ)(ಯ+ಕ್ಷ) ಚೌ. ಇಂ. ಆಗುವದು. ಈಗ ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡಲು ಒಂದೆಡೆ ಕೂಡಿಸಲಾದ ಆ ನಾಲ್ಕು ತುಂಡುಗಳ ಬೇರೀಜನಷ್ಟೇ ಈ ಫಲಕದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಾದರೂ ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪಯ + ಮಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಕ್ಷ = (ಪ + ಮ)(ಯ + ಕ್ಷ).

೬.೧೨. ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಮತ್ತು ಗುಣಪೃಥ-
ಕ್ತರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವಿರುದ್ಧ
ಅಂದರೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು
ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,
೩ ಮತ್ತು ೭ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೨೧; ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ೨೧ರ
ಅವಯವಗಳು ೩ ಮತ್ತು ೭. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ
ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ನಮಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಹಂತಗಳನ್ನೇ
ವಿರುದ್ಧಕ್ರಮದಿಂದ ನಮಗೆ ಗುಣಾಕಾರರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣವನ್ನು
ಮಾಡುವಾಗ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಕರಿಸಲು
ಕೆಳಗೆ ಪ+ಮ ಮತ್ತು ಯ+ಕ್ಷ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮತ್ತು
ಪಯ+ಪಕ್ಷ+ಮಯ+ಮಕ್ಷ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣವನ್ನು
ಮಾಡುವಾಗ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಹಂತಗಳನ್ನು ಎದುರು
ಬದಿರು ಮಂಡಿಸಿದೆ.

ತುಂಡುಗಳಿರುವವು. ಅವುಗಳ
ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ
ಪಯ ಚೌ. ಇಂ., ಮಯ ಚೌ.
ಇಂ., ಪಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ., ಮತ್ತು
ಮಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವವು.
ಒಂದು ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡುವದರ
ಸಲುವಾಗಿ ಈ ನಾಲ್ಕು ತುಂಡು-
ಗಳನ್ನು ಆ. ೨ ಆ ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ-

$(ಪ+ಮ)(ಯ+ಕ್ಷ)$ $\equiv ಪ(ಯ+ಕ್ಷ)+ಮ(ಯ+ಕ್ಷ)$ $\equiv ಪಯ+ಪಕ್ಷ+ಮಯ+ಮಕ್ಷ$	$ಪಯ+ಪಕ್ಷ+ಮಯ+ಮಕ್ಷ$ $\equiv ಪ(ಯ+ಕ್ಷ)+ಮ(ಯ+ಕ್ಷ)$ $\equiv (ಪ+ಮ)(ಯ+ಕ್ಷ)$
--	--

೬.೧೩. ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳಿರುವ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮುಂದೆ ಮಾಡುವಾ :

ಉ. ೧. ಅ^೨ + ಅಪ + ಅಮ + ಪಮ \equiv ಅ(ಅ + ಪ) + ಮ(ಅ + ಪ)
 \equiv (ಅ + ಪ)(ಅ + ಮ).

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ರಾಶಿಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಹಳ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವಂಥದಿದೆ. ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಪ್ರಥಮ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ವರ್ಣವಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ಣವಿರುವ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು, ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಬೇರೆ ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವು ಕಂಡುಬಂದರೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದು ಆ ರಾಶಿಯ ಅವಯವವಿರುವದು.

ಮೇಲಿನ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅ, ಪ, ಮತ್ತು ಮ, ಈ ಮೂರು ವರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ, ಪ ಮತ್ತು ಮ, ಈ ಎರಡು ವರ್ಣಗಳು ಕೇವಲ ಪ್ರಥಮ ಘಾತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವವು. ಅದುದರಿಂದ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣದ ಸಲುವಾಗಿ ರಾಶಿಯ ಪುನರ್ವರ್ಜನೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ (೧) ಪ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು, ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪು, ಇಲ್ಲವೆ (೨) ಮ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಬೇರೆ ಗುಂಪು, ಹೀಗೆ ಪದಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಬೇಕು. ಮೇಲೆ ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಪದಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಂಡಿಸುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು.

$$\begin{aligned} ಅ^೨ + ಅಪ + ಅಮ + ಪಮ &\equiv ಅ^೨ + ಅಮ + ಅಪ + ಪಮ \\ &\equiv ಅ(ಅ + ಮ) + ಪ(ಅ + ಮ) \\ &\equiv (ಅ + ಮ)(ಅ + ಪ). \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ಯ^೨ - ಕಯ - ಗಯ + ಕಗ \equiv ಯ(ಯ-ಕ)-ಗ(ಯ-ಕ)
 \equiv (ಯ - ಕ)(ಯ - ಗ).

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೩. } ರ^೨ - ತರ + ದರ - ತದ &\equiv ರ(ರ - ತ) + ದ(ರ - ತ) \\ &\equiv (ರ - ತ)(ರ + ದ).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೪. } ೨ಲ^೨ - ೧೫ಪಲ + ೧೪ಬಲ - ೩೫ಪಬ \\ &\equiv ೩ಲ(೨ಲ - ೫ಪ) + ೭ಬ(೨ಲ - ೫ಪ) \\ &\equiv (೨ಲ - ೫ಪ)(೩ಲ + ೭ಬ).\end{aligned}$$

ನಾಲ್ಕುಕ್ರಮಿತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಇದೇ ತರದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಸೃಢ-
ಕೃರಣವನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೫. } ಅತ + ಅದ + ಅನ + ಕತ + ಕದ + ಕನ \\ &\equiv ಅ(ತ + ದ + ನ) + ಕ(ತ + ದ + ನ) \\ &\equiv (ಅ + ಕ)(ತ + ದ + ನ).\end{aligned}$$

(ಇಲ್ಲಿ ಅ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಉಳಿದವುಗಳೆಂದೂ ಎರಡನೆಯದು,
ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದೆ). ಇಲ್ಲವೆ

$$\begin{aligned}\text{ಅತ + ಅದ + ಅನ + ಕತ + ಕದ + ಕನ} &\equiv \text{ಅತ + ಕತ + ಅದ + ಕದ + ಅನ + ಕನ} \\ &\equiv \text{ತ(ಅ + ಕ) + ದ(ಅ + ಕ) + ನ(ಅ + ಕ)} \\ &\equiv (ಅ + ಕ)(ತ + ದ + ನ).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೬. } ೧೦ಯ^೨ + ೫ಪಯ - ೪ಬಯ + ೨ಮಯ - ೨ಪಬ + ಪಮ \\ &\equiv (೧೦ಯ^೨ - ೪ಬಯ + ೨ಮಯ) + (೫ಪಯ - ೨ಪಬ + ಪಮ) \\ &\equiv ೨ಯ(೫ಯ - ೨ಬ + ಮ) + ಪ(೫ಯ - ೨ಬ + ಮ) \\ &\equiv (೨ಯ + ಪ)(೫ಯ - ೨ಬ + ಮ).\end{aligned}$$

(ಇಲ್ಲಿ ಪ ಇಲ್ಲದ ಪದಗಳೆಂದೂ ಮತ್ತು ಪ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳೆಂದೂ ಎರಡನೆಯದು,
ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದೆ). ಇಲ್ಲವೆ

$$\begin{aligned}\text{೧೦ಯ^೨ + ೫ಪಯ - ೪ಬಯ + ೨ಮಯ - ೨ಪಬ + ಪಮ} \\ &\equiv ೧೦ಯ^೨ + ೫ಪಯ - ೪ಬಯ - ೨ಪಬ + ೨ಮಯ + ಪಮ \\ &\equiv ೫ಯ(೨ಯ + ಪ) - ೨ಬ(೨ಯ + ಪ) + ಮ(೨ಯ + ಪ) \\ &\equiv (೨ಯ + ಪ)(೫ಯ - ೨ಬ + ಮ).\end{aligned}$$

ಉ. ೭. ೩ಕತ-೬ಗತಫಠತೃಕದ-೪ಗದ+೬ಫದ-ಕನ

+೨ಗನ-೩ಫನ

≡ ೩ತ(ಕ-೨ಗ+೩ಫ)+೨ದ(ಕ-೨ಗ+೩ಫ)-ನ(ಕ-೨ಗ+೩ಫ)

≡ (ಕ-೨ಗ+೩ಫ) (೩ತ+೨ದ-ನ).

ಉ. ೮. ೨ಯೃ-೨ಕಯ+೪ಗಯ+೩ಪಯ-ಮಯ-೩ಕಪ+೬ಗಪ

+ಕಮ-೨ಗಮ

≡ (೨ಯೃ-೨ಕಯ+೪ಗಯ)+(೩ಪಯ-೩ಕಪ+೬ಗಪ)

-(ಮಯ-ಕಮ+೨ಗಮ)

≡ ೨ಯ(ಯ-ಕ+೨ಗ)+೩ಪ(ಯ-ಕ+೨ಗ)-ಮ(ಯ-ಕ+೨ಗ)

≡ (ಯ-ಕ+೨ಗ) (೨ಯ+೩ಪ-ಮ).

(ಇಲ್ಲಿ ಪ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳದೊಂದು, ಮ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳದೊಂದು ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳದೊಂದು, ಹೀಗೆ ಮೂಲ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಪದಗಳ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಅವುಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟ (ಮಾತಾಡುವ) ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವೆಂದು ಕಂಡುಬಂದದ್ದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ಎರಡನೆಯ ಅವಯವವೆಂದು ಬರೆದಿದೆ).

ಪ-ಮ ಮತ್ತು ಮ-ಪ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೆಟ್ಟಿಗೆ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರದ ಮೂಲಕ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಆಗುವ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಾರದೆಂದು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಕಂಸ-ವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ನಿಯಮಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ಪ - ಮ = -(ಮ - ಪ) ಮತ್ತು ಮ - ಪ = -(ಪ - ಮ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ :

೧. ಅಯ+ಆರ+ಪಯ+ಪರ. ೨. ೨ಪಯ-೨ಮಯ-ಪಕ್ಷ+ಮಕ್ಷ.

೩. ೨ಕಪ-ಗಪ+೨ಕಮ-ಗಮ. ೪. ೮ತಪ+೬ದಪ-೪ತಮ-೬ದಮ.

೫. ೩೨ಕಯ - ೧೨ಗಯ - ೪೦ಕಕ್ಷ + ೧೫ಗಕ್ಷ.

೬. ಲಪಯ - ಲಮಯ + ಲಪರ - ಲಮರ.
 ೭. ಒಗವ - ಒಜವ - ಒಗಮ + ಒಜಮ.
 ೮. ಒದವ - ಒಜವ + ಒದಮ - ಒಜಮ.
 ೯. ಒಂಕರ + ಒಜರ + ಒಂಕಲ + ಒಜಲ.
 ೧೦. ಒಜವ - ಒಜವ - ಒಮ + ಒಜಮ.
 ೧೧. ಲಪಲ - ಲಬಲ + ಲಪವ - ಒಬವ.
 ೧೨. ಒಮಯ - ಲಮವ + ಲಯ - ಒವ.
 ೧೩. ಒಪಯ - ಒಮಯ - ಒಂಪ + ಒಮ.
 ೧೪. ಲಕರ + ಲಕಲ - ಲರ - ಲಲ. ೧೫. ಒತವ - ಒತವ್ವ + ಲವ - ಒವ್ವ.
 ೧೬. ಕಗ + ಒಕ + ಒಗ + ಒಂ. ೧೭. ಯರ - ಲಯ - ಒರ + ಒಳ.
 ೧೮. ಪಬ - ಒಪ + ಒಬ - ಒಬ. ೧೯. ಜನ + ಲಜ - ಒಜನ - ಲಜ.
 ೨೦. ಒಪಯ-ಒಮಯ-ಲಪ+ಲ. ೨೧. ಒಯರ-ಒಳಯ+ಒಳರ-ಒಳ.
 ೨೨. ಲ+ಒಳ+ಒಳ+ಒಳ+ಒಳ. ೨೩. ಬಮ+ಒಬಯ-ಒಮಯ-ಒಜಯ.
 ೨೪. ಲರ - ಲಪರ + ಒಬರ - ಒಪಬ.
 ೨೫. ಒಯ-ಒಜವಯ-ಒಮಯ+ಒಂಪಮ.
 ೨೬. ಒಯ + ಒಂಪಯ + ಲಬಯ + ಒಪಬ.
 ೨೭. ಒಳಯ - ಒಕಯ + ಒಳಗಯ - ಒಳಕಗ.
 ೨೮. ಪಯ - ಬಯ - ಮಯ - ಪವ್ವ + ಬವ್ವ + ಮವ್ವ.
 ೨೯. ಕಯ - ಗಯ + ಫಯ + ಕವ್ವ - ಗವ್ವ + ಫವ್ವ.
 ೩೦. ಲಪ - ಲಬ + ಒಮ - ಪಯ + ಲಬಯ - ಒಮಯ.
 ೩೧. ಒಪಯ + ಒಬಯ - ಒಮಯ - ಒಂಪವ್ವ - ಒಜಬವ್ವ + ಒಮವ್ವ.
 ೩೨. ಯ - ಲಮಯ + ಒಕಯ - ಒಗಯ - ಲಕ + ಒಳ.
 ೩೩. ಲಪಯ+ಒಬಯ-ಮಯ-ಒಪಲ-ಒಬಲ+ಒಮಲ+ಒಪವ+ಒಬವ
 -ಮವ.
 ೩೪. ಯ-ಕಯ+ಒಳಯ-ಒಪಯ+ಒಮಯ+ಒಕಪ-ಲಫಪ-ಒಕಮ
 +ಒಳಮ.



ಪೌ±೨ಪಮ + ಮೌ ≡ (ಪ±ಮ)೨.

೬.೧೪. ಈಗ ನಾವು ಪೌ+೨ಪಮ+ಮೌ ಮತ್ತು ಪೌ-೨ಪಮ+ಮೌ

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ಮೊದಲನೇ-ಯದು ಪ + ಮ ದ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ಪ - ಮ ದ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಥವಾ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ವರ್ಗವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದು. ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಾವು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಹಿಂದೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

$$\begin{array}{lcl}
 (ಪ+ಮ)೨ & \equiv & (ಪ+ಮ)(ಪ+ಮ) \\
 & \equiv & ಪ(ಪ+ಮ)+ಮ(ಪ+ಮ) \\
 & \equiv & ಪೌ+ಪಮ+ಪಮ+ಮೌ \\
 & \equiv & ಪೌ+೨ಪಮ+ಮೌ. \\
 \hline
 (ಪ-ಮ)೨ & \equiv & (ಪ-ಮ)(ಪ-ಮ) \\
 & \equiv & ಪ(ಪ-ಮ)-ಮ(ಪ-ಮ) \\
 & \equiv & ಪೌ-ಪಮ-ಪಮ+ಮೌ \\
 & \equiv & ಪೌ-೨ಪಮ+ಮೌ.
 \end{array}$$

ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ + ಮ ಮತ್ತು ಪ + ಮ, ಪ - ಮ ಮತ್ತು ಪ - ಮ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿವೆ, ಮತ್ತು ಗುಣಕಾರ ಹಾಗೂ ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣ ಇವು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ (ವರ್ಗವಿಸ್ತಾರ ಮಾಡುವಾಗ) ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಮಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಹಂತಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಇದು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಪೌ + ೨ಪಮ+ಮೌ

≡ ಪೌ+ಪಮ+ಪಮ+ಮೌ

≡ ಪ(ಪ+ಮ)+ಮ(ಪ+ಮ)

≡ (ಪ+ಮ)(ಪ+ಮ)

≡ (ಪ+ಮ)²

ಪೌ-೨ಪಮ+ಮೌ

≡ ಪೌ-ಪಮ-ಪಮ+ಮೌ

≡ ಪ(ಪ-ಮ)-ಮ(ಪ-ಮ)

≡ (ಪ-ಮ)(ಪ-ಮ)

≡ (ಪ-ಮ)²

ಇದರಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನಂತೆ ನಿರ್ಣಯವಾಗುವದು. (೧) ಯಾವದೊಂದು ತ್ರಿಪದಿಯು ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಇವೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ, ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುವದು, ಮತ್ತು (೨) ಅದು ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಅನೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ, ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಇರುವದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನದೊಳಗಿನ ಮತಿತಾರ್ಥವು ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶವಾಗುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಪೂರ್ಣ ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಪೌ-೨ಪಮ+ಮೌ = ಪೌ+೨. ಪ. (-ಮ) + (-ಮ)², ಮತ್ತು ಪ-ಮ = ಪ+(-ಮ).

೬.೧೫. ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಆಕೃತಿಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುವಾ.

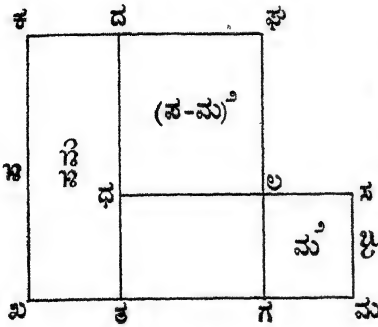
	ಮ
ಪೌ	ಪಮ
ಪಮ	ಮೌ

ಆ. ೩

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಆ ಆಕೃತಿಯು ಎರಡು ಚೌರಸಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳು ಕೂಡಿ ಆಗಿದೆ. ಚೌರಸಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಪೌ ಚೌ. ಇಂ. ಮತ್ತು ಮೌ ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಪಮ ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ. ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ಆಕೃತಿಗಳು ಕೂಡಿ ಆದ ಈ ದೊಡ್ಡ ಆಕೃತಿಯು ಚೌರಸವಿದ್ದು.

ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯು (ಪ + ಮ) ಇಂ. ಇದೆಯೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ + ಮ)^೨ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯಾದರೂ ಅಷ್ಟೇ ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು.

$$ಪ + ೨ಪಮ + ಮ = (ಪ + ಮ)^೨.$$



ಆ. ಲ

ಈ ಆಕೃತಿಯು ಎರಡು ಚೌರಸಗಳಿಂದೊಡಗೂಡಿದೆ. ಕಬಿಗಘ ಇದು ಪ ಇಂ. ಭುಜದ ಚೌರಸವಿದ್ದು ಲಗಮಸ ಇದು ಮ ಇಂ. ಭುಜದ ಚೌರಸವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ^೨ ಚೌ. ಇಂ. ಮತ್ತು ಮ^೨ ಚೌ. ಇಂ. ಇವೆ. ಮತ್ತು

ಇಡೀ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ^೨ + ಮ^೨) ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದು. ಕಖತದ ಮತ್ತು ತಮಸಧ ಇವೆರಡು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಪ ಇಂ. ಮತ್ತು ಮ ಇಂ. ಇವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಪಮ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದು. ಈ ಎರಡು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಆಕೃತಿಯೊಳಗಿಂದ ತೆಗೆದುಬಿಟ್ಟರೆ ದಧಲಘ ಈ ಭಾಗವು ಉಳಿಯುವದು. ಮೂಲ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ^೨ + ಮ^೨) ಚೌ. ಇಂ. ಮತ್ತು ಈ ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಪಮ ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದ ಮೂಲಕ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨) ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದು. ಈಗ ದಧಲಘ ಈ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವದು. ಅದೊಂದು ಚೌರಸವಿದ್ದು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು

(ಪ - ಮ) ಇಂ. ಇದೆ, ಅಂದರೆಯೇ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ - ಮ)^೨ ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವದೇನೆಂದರೆ,

$$ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨ \equiv (ಪ - ಮ)^೨.$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ನಮಗೆ ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಇಲ್ಲವೆ ಉಣಾ ಅನೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇನ್ನುಡಿ, ಹೀಗೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬಂದರೆ ಆ ರಾಶಿಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇಲ್ಲವೆ ಆ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗವಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

೬.೧೬. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಗಳು ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೋ ಹೇಗೆ, ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ ಅವು ಯಾವ ದ್ವಿಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನಾವು ನೋಡುವಾ.

ಉ. ೧. ಯ^೨ - ೧೮ಯ + ೮೧. ಇಲ್ಲಿ ಯ^೨ ಇದು ಯದ ವರ್ಗವಿದ್ದು ೮೧ ಇದು ೯ರ ವರ್ಗವಿದೆ, ಮತ್ತು ೧೮ಯ ಇದು ೯ ಹಾಗೂ ಯ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇನ್ನುಡಿ ಇದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಯ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಯ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇನ್ನುಡಿ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಯ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಅಂತರದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇದೆ.

$$\therefore ಯ^೨ - ೧೮ಯ + ೮೧ \equiv (ಯ - ೯)^೨.$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ (ಯ - ೯)^೨ದ ಬದಲು (೯ - ಯ)^೨ ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. (ಯ - ೯)ರ ವರ್ಗ ಮತ್ತು (೯ - ಯ)ದ ವರ್ಗ ಇವು ಒಂದೇ. ಮತ್ತು ಇದು ಸಹಜವೇ ಇದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ೯ - ಯ = -(ಯ - ೯). ಮತ್ತು ಯ - ೯ ಗುಣಲೆ ಯ - ೯ ಹಾಗೂ -(ಯ - ೯) ಗುಣಲೆ -(ಯ - ೯) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಭೇದವೂ ಇರುವದಿಲ್ಲ. -ಅದ ವರ್ಗ ಅ^೨ ಮತ್ತು ಅದ ವರ್ಗವೂ ಅ^೨ ವೇ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಎರಡು ಇರುವವು. ೪ರ ವರ್ಗಮೂಲವು +೨ ಇಲ್ಲವೆ -೨, ಅ^೨ದ ವರ್ಗಮೂಲವು +ಅ ಇಲ್ಲವೆ -ಅ, ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ದ ವರ್ಗಮೂಲವು ಪ + ಮ ಇಲ್ಲವೆ -ಪ - ಮ ಮತ್ತು ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨ದ ವರ್ಗಮೂಲವು ಪ - ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ - ಪ.

ಉ. ೨. ಅಜಿಮಿ + ೭೦೦ + ೪೯. ಅಜಿಮಿ ಇದು ಜಿಮಿ ದ ವರ್ಗವಿದ್ದು ೪೯ ಇದು ೭ ರ ವರ್ಗವಿದೆ, ಮತ್ತು ೭೦೦ ಇದು ಜಿಮಿ ಹಾಗೂ ೭ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದೆ.

$$\therefore \text{ಅಜಿಮಿ} + ೭೦೦ + ೪೯ \equiv (\text{ಜಿಮಿ} + ೭)^೨.$$

ಉ. ೩. ೩೬ಪಿ + ೪೯ಪಮ + ೨೫ಮಿ. ೩೬ಪಿ ಇದು ೬ಪ ದ ವರ್ಗವಿದೆ, ೨೫ಮಿ ಇದು ಜಿಮಿ ದ ವರ್ಗವಿದೆ; ಆದರೆ ೪೯ಪಮ ಇದು ೬ಪ ಮತ್ತು ಜಿಮಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ಅಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ತ್ರಿಪದಿಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವದಿಲ್ಲ. ಎರಡನೆಯ ಪದವು ೪೯ಪಮ ದ ಬದಲಾಗಿ ೬೦ಪಮ (೬ಪ ಮತ್ತು ಜಿಮಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ) ಇದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ೬ಪ + ಜಿಮಿ ದ ವರ್ಗವಿರಬಹುದಾಗಿತ್ತು.

ಉ. ೪. ೬೪ಯಿ - ೧೭೬ಯಕ್ಷ + ೧೨೧ಕಿ ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ:

$$\begin{aligned} ೬೪ಯಿ - ೧೭೬ಯಕ್ಷ + ೧೨೧ಕಿ \\ &\equiv (\text{೮ಯಿ})^೨ - ೨. ೮ಯಿ. ೧೧ಕ್ಷ + (೧೧ಕ್ಷ)^೨ \\ &\equiv (\text{೮ಯಿ} - ೧೧ಕ್ಷ)^೨. \end{aligned}$$

ಉ. ೫. ೪೯ಯಿ + ಯರ + ೧೬೬ರ ದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.
 $೪೯ಯಿ + ಯರ + ೧೬೬ರ \equiv (೭ಯಿ)^೨ + ೨. ೭ಯಿ. ೧೬ರ + (೧೬ರ)^೨$
 $\equiv (೭ಯಿ + ೧೬ರ)^೨.$

ಉ. ೬. ೮ಯಿ - ೫೬ಯರ + ೯೮ರ ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.
 $೮ಯಿ - ೫೬ಯರ + ೯೮ರ \equiv ೨(೪ಯಿ - ೨೮ಯರ + ೪೯ರ)$
 $\equiv ೨(೪ಯಿ - ೭ರ)^೨.$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂಲ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ಇರುವ ೨ ಈ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದ ಬಳಿಕ ಕಂಪನಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಪದಸಮುಚ್ಚಯವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಗುಣಸೃಷ್ಟಿಕೃರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯು ಯಾವುದೆಂದರೆ ಗುಣಸೃಷ್ಟಿಕೃರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ

ಯಾವದೊಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಬಂದರೆ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು, ತರುವಾಯ ಉಳಿದವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಬೇಕು.

ಉ. ೭. ೨೭ರ^೪ - ೯೦ರ^೨ಲ^೨ + ೭೫ರ^೪ ದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$೨೭ರ^೪ - ೯೦ರ^೨ಲ^೨ + ೭೫ರ^೪ \equiv ೩(೯ರ^೪ - ೩೦ರ^೨ಲ^೨ + ೨೫ರ^೪)$$

$$\equiv ೩ \{ (೩ರ^೨)^೨ - ೨೩ರ^೨ \cdot ೫ಲ^೨ + (೫ಲ^೨)^೨ \}$$

$$\equiv ೩(೩ರ^೨ - ೫ಲ^೨)^೨.$$

ಉ. ೮. (೫ಯ + ೪ರ)^೨ - ೨(೫ಯ + ೪ರ)(೪ರ - ೭ಲ) + (೪ರ - ೭ಲ)^೨ ದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫ಯ + ೪ರ ಮತ್ತು ೪ರ - ೭ಲ ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ವ ಮತ್ತು ಸ ಈ ವರ್ಣಗಳಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\text{ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು} = ವ^೨ - ೨ವಸ + ಸ^೨$$

$$= (ವ - ಸ)^೨$$

$$= \{ (೫ಯ + ೪ರ) - (೪ರ - ೭ಲ) \}^೨$$

$$= (೫ಯ + ೪ರ - ೪ರ + ೭ಲ)^೨$$

$$= (೫ಯ + ೭ಲ)^೨.$$

ಉ. ೯. ೪೯ದ^೨ - ೧೬೮ದನ + ೧೪೪ನ^೨ - ೨೧ದ + ೩೬ನ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಸುಲಭರೀತಿಯಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಎರಡು ಭಾಗಗಳು ಆಗುವವು. ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರು ಪದಗಳ ಭಾಗವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿದ್ದು ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಿರುವದೋ ಅದು ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅವಯವ ರೂಪದಿಂದ ಇದೆ. ಅದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$೪೯ದ^೨ - ೧೬೮ದನ + ೧೪೪ನ^೨ - ೨೧ದ + ೩೬ನ$$

$$\equiv (೭ದ - ೧೨ನ)^೨ - ೩(೭ದ - ೧೨ನ)$$

$$\equiv (೭ದ - ೧೨ನ)(೭ದ - ೧೨ನ - ೩).$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೋ ಹೇಗೆ, ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ ಅವು ಯಾವವುಗಳ ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದಲೇ ಮಾಡಲು ಬರುವವು.)

೧. ಯೌ-೧೨ಯ+೩೬. ೨. ಛರೌ+೨೦ರೌ+೨೫.
೩. ಗ೬ಲೌ+೫೬ಲ+೪೯. ೪. ಅ೫ಸೌ-೭೦ಸ+೪೯.
೫. ಲಗ-೧೮ರ+ರೌ. ೬. ಓಳ+೪೮ಕ್ಷ+೯ಕ್ಷೌ.
೭. ಅ೫ಸೌ+೨೦ಪಮ+೪ಮೌ. ೮. ಓ೬ಯೌ-೮೪ಯಲ+೪೯ಲೌ.
೯. ಗ೨ಗಪೌ-೧೯೮ಪರ+೮ಗರೌ. ೧೦. ಓ೬ಪೌ+೧೨೦ಪಮ+೧೦೦ಮೌ.
೧೧. ಛ೯ಪೌ+೫೬ಪಬ+ಗ೬ಬೌ. ೧೨. ಗ೪ಳಪೌ-೧೨೦ಪಮ+೨೫ಮೌ.
೧೩. ಗ೬ಯೌ-೭೨ಯರ+೮ಗರೌ. ೧೪. ಗ೦೦ರೌ-೬೦ರಲ+೯ಲೌ.
೧೫. ಗ೨ಗಪೌ-೧೦೦ಪಮ+೨೫ಮೌ. ೧೬. ಛ೯ಯೌ-೪೨ಯರ+೯ರೌ.
೧೭. ಲಗಅೌ+೮೦ಅ+೯. ೧೮. ಗ೬ಅೌ+೪ಅ+ಗ.
೧೯. ಓ೬+ಗ೩೨ಮ+ಗ೨ಗಮೌ. ೨೦. ಲಗನೌ+೨೮ನಕ್ಷ+೨೫೬ಕ್ಷೌ.
೨೧. ಓ೭೫ಯೌ-೨೦೦ಯಕ್ಷ+ಗ೬ಕ್ಷೌ. ೨೨. ಓ೭ಃ - ಅಕ್ಷ + ಗ೬ಅಕ್ಷೌ.
೨೩. ಗ೬ಪೌ-೨೪ಪೌಮೌ+೯ಮೌ. ೨೪. ಅ೫ಅೌ+೩೦ಅೌಕ್ಷೌ+೯ಕೌ.
೨೫. ಓ೬ಕೌ+೮೪ಕಪೌ+೪೯ಪೌ. ೨೬. ಛರೌ-೨೦ರೌಲೌ+೨೫ಲೌ.
೨೭. ಛ೯ಯಲ - ಯೌಕ್ಷೌ + ಗ೯೬ಕ್ಷೌ.
೨೮. (೨ಯ-ರೌ)-೨(೨ಯ-ರ)(ಯ-೨ರ) + (ಯ-೨ರ)ೌ.
೨೯. ಛ(೩ಪ-೫ಮ)ೌ+ಗ೨(೩ಪ-೫ಮ)(೩ಮ-೫ಪ)+೯(೩ಮ-೫ಪ)ೌ.
೩೦. ಗ೬(ಪ+ಮ)ೌ+೪೦(ಪ+ಮ)(ಯ+ರ) + ೨೫(ಯ+ರ)ೌ.
೩೧. ಛ೯(೩ಯ+೫ರ)ೌ-೧೧೨(೩ಯ+೫ರ)(೨ರ-ಲ)+೬೪(೨ರ-ಲ)ೌ.

ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ:

೩೨. ಅ೫ಯೌ+೬೦ಯರ+೩೬ರೌ-೫ಯ-೬ರ.
೩೩. ಛರೌ-೨೦ರಲ+೨೫ಲೌ-ಗ೪ರ+೩೫ಲ.
೩೪. ಗ೬ಪೌ - ೪ಪಮ + ೯ಮೌ - ಗ೬ಪ + ೨ಮ.

೩೫. ಯೌ + ೨ + $\frac{೧}{ಯೌ}$ + ೩ಯ + $\frac{೩}{ಯ}$.

೩೬. ೯ಕ್ಷೌ-೧೨ಕಕ್ಷ+೪ಕೌ-೨೧ಕ್ಷ+೧೪ಕ.

೩೭. ೨೫ರೌ-೬೦ರಸ+೩೬ಸೌ-೧೦ಕರ+೧೨ಕಸ.

೪.

ಪೌ - ಮೌ

೬.೧೭. ಈಗ ನಾವು ಪೌ-ಮೌ ಈ ರೀತಿಯ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವರ್ಗ ಉಣಾ ಎರಡನೆಯ ವರ್ಗ, ಇಂಥ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದಂತೆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು (ಪ + ಮ) ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಜಾಕೆ (ಪ - ಮ), ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ ಉಣಾ ಎರಡನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ (ಪೌ - ಮೌ), ಇಷ್ಟು ಇರುವದು. ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

$$\begin{aligned} (ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ) &\equiv ಪ(ಪ + ಮ) - ಮ(ಪ + ಮ) \\ &\equiv ಪೌ + ಪಮ - ಪಮ - ಮೌ \\ &\equiv ಪೌ - ಮೌ. \end{aligned}$$

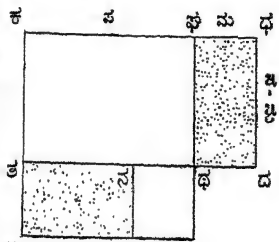
ಈಗ ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ (ಪೌ - ಮೌ) ಈ ರಾಶಿಯು (ಪ + ಮ) ಮತ್ತು (ಪ - ಮ) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ನಮಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಹಂತಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮವನ್ನು ಆ ಗುಣಾಕಾರದ (ಪೌ - ಮೌ) ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಆಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} ಪೌ - ಮೌ &\equiv ಪೌ + ಪಮ - ಪಮ - ಮೌ \\ &\equiv ಪ(ಪ + ಮ) - ಮ(ಪ + ಮ) \\ &\equiv (ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ). \end{aligned}$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುವದು. ಈ ವಿಧಾನವು ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಗೆ ಸರಿಯಿರುವದು, ಎಂಬ ನಮಗೆ ಹಿಂದೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ವಿಧಾನದ ಕೇವಲ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ.

೭.೧೮. ಈಗ ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಆಕೃತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಸಿದ್ಧವಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯೊಳಗಿನ ಕಖಗಘ ಕ ಇದೊಂದು ಪ ಇಂ. ಭುಜವಿರುವ ಚೌರಸವಿದೆ. ಮತ್ತು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅದರದೇ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ನಲಗಢ ಈ ಮ ಇಂ. ಭುಜವಿರುವ ಎರಡನೆಯದೊಂದು ಚೌರಸವಿರುವದು. ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ- ಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪೌ ಚೌ.



ಆಕೃತಿ ೫.

ಇಂ. ಮತ್ತು ಮೌ ಚೌ. ಇಂ. ಇವೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮೊದಲನೆಯ ಚೌರಸನೊಳಗಿಂದ ಎರಡನೇ ಚೌರಸವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಆಕೃತಿಯ (ಕಖಲನಢಘ) ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪೌ-ಮೌ) ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ. ಈ ಉಳಿದ ಆಕೃತಿಯೊಳಗಿನ ತಖಲನ ಈ ಭಾಗವು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನವಿದ್ದು ತನದ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ-ಮ) ಇಂ. ಅಂದರೆ ಘಢದಷ್ಟು ಇರುವದು. ಮತ್ತು ತಖದ್ದು ಮ ಇಂ. ಇದೆ. ಈ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕತಢಘಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಕತಢಢ ಈ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನವು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು. ಈ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಢದ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ+ಮ) ಇಂ. ಇದ್ದು ಕತವು (ಪ-ಮ) ಇಂ. ಇರುವದು. ಅಂದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ. ಈಗ ಈ ಕಾಟ-

ಕೋನ ಚೌಕೋನವು ಮೂಲ ಚೌರಸ ಕಖಗಘ (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಪ) ಇದರೊಳಗಿಂದ ನಲಗಘ ಈ ಚೌರಸವನ್ನು (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮ) ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಉಳಿಯುವ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$ಪ - ಮ \equiv (ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ).$$

೬.೧೯. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೧. } ೪ಯ - ೨೫ರ &\equiv (೨ಯ) - (೫ರ) * \\ &\equiv (೨ಯ + ೫ರ)(೨ಯ - ೫ರ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೨. } ೬೨೫ - ೧೧೦ಯ &\equiv (೨೫) - (೧೦ಯ) * \\ &\equiv (೨೫ + ೧೦ಯ)(೨೫ - ೧೦ಯ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೩. } ೩೬ಪ - ೬೯ಮ &\equiv (೬ಪ) - (೯ಮ) \\ &\equiv (೬ಪ + ೯ಮ)(೬ಪ - ೯ಮ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೪. } ೧೪೪ರ - \frac{೧}{೧೧೦ಲ} &\equiv (೧೪ರ) - \left(\frac{೧}{೧೧}\right) * \\ &\equiv \left(೧೪ರ + \frac{೧}{೧೧ಲ}\right) \left(೧೪ರ - \frac{೧}{೧೧ಲ}\right). \end{aligned}$$

ಉ. ೫. ೧೨೨ಯ - ೭೫೨ಕ್ಷ. ಇಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಮೇಲೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸೂತ್ರವು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲವೆಂದು ಎನಿಸುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ೩೨ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದು ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದೊಡನೆಯೇ ೪ಯ-೨೫ಕ್ಷ ಈ ಎರಡನೆಯ ಅವಯವವು ಉಳಿಯುವದು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹಚ್ಚಲು ಬರುವದೆಂಬುದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ ತರುವಾಯ ಮುಂದೆ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ಹಿಂದೆ ಒಂದೆರಡುಸಲ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳೇ ಮಹತ್ವವುಳ್ಳದ್ದು ಇರುವದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಪುನಃ ಒಂದು ಸಲ ಹೇಳುವದು ಇಷ್ಟವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯು ಅದ ಬಳಿಕ ನಮಗೆ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

೧೨ಅಯ್ - ೭೫ಅಕ್ಷ್ಯ \equiv ೩ಅ(೪ಯ್ - ೭೫ಅಕ್ಷ್ಯ)
 \equiv ೩ಅ(೨ಯ್ + ೫ಕ್ಷ್ಯ)(೨ಯ್ - ೫ಕ್ಷ್ಯ).

ಉ. ೬. ೧೦೦ಯ್ - (೪ರ - ೭ಲ) \equiv ೧೦೦ಯ್ - ಮು* [೪ರ-೭ಲ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ
 \equiv (೧೦ಯ್ + ಮ) (೧೦ಯ್ - ಮ)
 \equiv (೧೦ಯ್ + ೪ರ - ೭ಲ) { ೧೦ಯ್ - (೪ರ - ೭ಲ) }
 $\quad \quad \quad [\because \text{ಮು} = ೪ರ - ೭ಲ]$
 \equiv (೧೦ಯ್ + ೪ರ - ೭ಲ) (೧೦ಯ್ - ೪ರ + ೭ಲ).

ಉ. ೭. ೭೫(೮ಯ್ - ೫ರ) - ೩೬(೩ರ - ೪ಲ) \equiv ೭೫ಪ - ೩೬ಮು* [೮ಯ್-೫ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು
 ೩ರ-೪ಲ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ
 \equiv (೫ಪ + ೬ಮು) (೫ಪ - ೬ಮು)*
 \equiv { ೫(೮ಯ್ - ೫ರ) + ೬(೩ರ - ೪ಲ) }
 $\quad \quad \quad \{ ೫(೮ಯ್ - ೫ರ) - ೬(೩ರ - ೪ಲ) \}$
 \equiv (೪೦ಯ್ - ೭೫ರ + ೧೮ರ - ೨೪ಲ) (೪೦ಯ್ - ೭೫ರ - ೧೮ರ + ೨೪ಲ)
 \equiv (೪೦ಯ್ - ೭ರ - ೨೪ಲ) (೪೦ಯ್ - ೪೩ರ + ೨೪ಲ).

ಉ. ೮. ಪ - ಮು \equiv (ಪ) - (ಮು) ಈ ಹಂತವನ್ನು
 ಬಿಡಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.
 \equiv (ಪ + ಮು)(ಪ - ಮು)
 \equiv (ಪ + ಮು)(ಪ + ಮು)(ಪ - ಮು).

ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದರೆ ತೆಗೆಯಲು ಶಕ್ಯವಿರುವ ಅದರ ಎಲ್ಲ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ತೋರಿಸುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರೇ (ಪ + ಮು)(ಪ - ಮು) ಬರೆದರೆ ಸಾಗದು. ಪ - ಮು ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವದಾದರೂ ಅತಿ ಅವಶ್ಯವಿದೆ.

ಪ + ಮು ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದಿಲ್ಲವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಲ ತಪ್ಪು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅನುಭವಕ್ಕೆ ಬಂದ ಮೂಲಕ ಬೇಕಂತಲೇ ಈ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ನಮಗೆ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಲು ಬರುವದು. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕಾಲುಗಾಡಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾ-
ಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.)

೧. ಪ^೨-ಗ^೬. ೨. ೨೫-ಮ^೨. ೩. ೩೬ಪ^೨-೮ಗಮ^೨.
 ೪. ೬೪ಅ^೨-೪೯ಕ^೨. ೫. ಗ^೯೬ಯ^೨-ಗ^೨೧ರ^೨. ೬. ೨೫ಯ^೨-ಗ^೬೯ಲ^೨.
 ೭. ಗ^೪೪ರ^೨-೮ಗಸ^೨. ೮. ೬೪ಮ^೨-೨೫ನ^೨.
 ೯. ೩೬ಗಪ^೨-೧೦೦ಕ^೨. ೧೦. ೮ಗತ^೨-೪೦೦ದ^೨.
 ೧೧. ೪೯ಯ^೨-೮೪ಗಲ^೨. ೧೨. ೩೬ಗರ^೨-೮ಗಸ^೨.
 ೧೩. ೪ಪ^೨-೯೬ಗಪ^೨. ೧೪. ೧೦೦ಕ^೨-೯ಗ^೨.
 ೧೫. ೨೫ಕ^೨-ಗ^೯೬ಜ^೨. ೧೬. ಗ^೮ನ^೨-೯೮ಮ^೨.
 ೧೭. ೨೦ಮ^೨-೧೨೫ಯ^೨. ೧೮. ೧೦೮ಯ^೨-೭೫ರ^೨.
 ೧೯. ೨೦೦ಪ^೨-೩೯೨ಬ^೨. ೨೦. ೬೪ಅ^೨-೧೪೪ಮ^೨.
 ೨೧. ೨೫ಪ^೨-೨೫ಭ^೨. ೨೧. ೯೯ಕ^೨-೩೬ಗ^೨.
 ೨೩. ೩೬ಯ^೨-೬೯ರ^೨. ೨೪. ೨೫ಪ^೨-೩೬.
 ೨೫. ೯೯ಪ^೨-೨೫ಮ^೨. ೨೬. ಯ^೨-೯೯ಗ^೨ಮ^೨.
 ೨೭. ೯೯ಪ^೨-೨೫ಮ^೨. ೨೮. ೯೦೦ಕ^೨ಯ^೨-೪೦೦ಸ^೨.
 ೨೯. ಗ^೪೭ಪ^೨ರ^೨-ಗ^೯೯೨ಲ^೨. ೩೦. ೧೫೦ತ^೨ಪ^೨-೯೬ತ^೨ಮ^೨.
 ೩೧. ೪೪೮ನಯ^೨-೬೩ನಲ^೨. ೩೨. ೫೦ಪ^೨ರ^೨-೧೨೮ಬ^೨ಲ^೨.
 ೩೩. ಗ^೬೬೪-೮ಗಕ^೨. ೩೪. ಯ^೨-೨೫೬ಲ^೨.
 ೩೫. ೩೨೫ಪ^೨-೨೫೬ಮ^೨. ೩೬. ೩೨ರ^೨-೧೨೫೦ಸ^೨.
 ೩೭. ಗ^೬೬೪-೨೫೬೮ನ^೨. ೩೮. ೪-೩೨೪ನ^೨.
 ೩೯. (೫ಯ-೨ರ)^೨-ಗ^೬೬ಲ^೨. ೪೦. (೮ಯ+೫ಲ)^೨-೩೬ಸ^೨.
 ೪೧. ಗ-(೨ಯ-೩ರ+೫ಲ)^೨ ೪೨. ೪(೨ಯ-೭ರ)^೨-೯(೮-೪ಸ)^೨.
 ೪೩. ಗ^೬(೩ಯ+೫ರ)^೨-೪೯(ರ-೮ಸ)^೨.
 ೪೪. ೨೫(೨ಪ-೩ಮ)^೨-೪(೨ಮ-೫ಸ)^೨.
 ೪೫. (೭ಪ-೪ಬ)^೨-(೪ಪ+೩ಬ)^೨.
 ೪೬. ಗ^೬(೨ಯ+೭ರ)^೨-೪೯(೪ರ-ಯ)^೨. ೪೭. ೪ಪ^೨-೯ಬ^೨.
 ೪೮. ೨೫ಪ^೨-೬೪ಮ^೨. ೪೯. ಗ^೬ಪ^೨-೮ಗಮ^೨.
 ೫೦. ಗ^೬ಕ^೨ಯ^೨-೮ಗಸ^೨ಸ^೨. ೫೧. ೨ಯ^೨-೩೨ಯಲ^೨.
 ೫೨. (೪ಯ-೫ಯರ-೭ರ)^೨-(೨ಯ-೩ಯರ+೭ರ)^೨.

೬.೨೦. ಪ^೨ - ಮ^೨ \equiv (ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ) ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪ-
ಯೋಗವನ್ನು ಗುಣಸೃಷ್ಟಕೃರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಡಲು ಬರುವ ಕೆಲವು ರಾಶಿ-
ಗಳಲ್ಲಿ, ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು
ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ತೆಗೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಖಯ^೨ - ೨೫ರ^೨ - ಲಯ^೨ + ೨೦ರ

$$\equiv (\text{ಖಯ}^2 - 25\text{ರ}^2) - (\text{ಲಯ} - 20\text{ರ})$$

$$\equiv (2\text{ಯ} + 3\text{ರ})(2\text{ಯ} - 3\text{ರ}) - 4(2\text{ಯ} - 3\text{ರ})$$

$$\equiv (2\text{ಯ} - 3\text{ರ})(2\text{ಯ} + 3\text{ರ} - 4).$$

ಉ. ೨. ೨೫ಯ^೨ + ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ - ಲಗಸ^೨.

ಇಲ್ಲಿ ೨೫ಯ^೨ + ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ ಇದು ೫ಯ + ೨ರ ಇದರ ವರ್ಗವಿದೆ,
ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಉಣಾ ಲಗಸ^೨ ಇದೆ. ಅಂದರೆ ರಾಶಿಯು ಎರಡು
ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದ್ದಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ,

$$25\text{ಯ}^2 + 20\text{ಯರ} + 4\text{ರ}^2 - \text{ಲಗಸ}^2 \equiv (5\text{ಯ} + 2\text{ರ})^2 - (4\text{ಸ})^2$$

$$\equiv (5\text{ಯ} + 2\text{ರ} + 4\text{ಸ})(5\text{ಯ} + 2\text{ರ} - 4\text{ಸ}).$$

ಉ. ೩. ೧೪೪ಪ^೨ - ೩೬ಬ^೨ + ೮೪ಬಮ - ೪೯ಮ^೨. ಇಲ್ಲಿ ೧೪೪ಪ^೨, ೩೬ಬ^೨,
ಮತ್ತು ೪೯ಮ^೨ ಇವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಿವೆ. ಅದುದರಿಂದ ೩೬ಬ^೨, ೪೯ಮ^೨, ಮತ್ತು
೮೪ಬಮ ಈ ಮೂರು ಪದಗಳ ಗುಂಪು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ-
ಯನ್ನು ನಮಗೆ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲು
ಬಂದರೆ, ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು
ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

೧೪೪ಪ^೨ - ೩೬ಬ^೨ + ೮೪ಬಮ - ೪೯ಮ^೨

$$\equiv 144\text{ಪ}^2 - (36\text{ಬ}^2 - 84\text{ಬಮ} + 49\text{ಮ}^2)$$

$$\equiv (12\text{ಪ})^2 - (6\text{ಬ} - 7\text{ಮ})^2$$

$$\equiv \{ 12\text{ಪ} + (6\text{ಬ} - 7\text{ಮ}) \} \{ 12\text{ಪ} - (6\text{ಬ} - 7\text{ಮ}) \} *$$

$$\equiv (12\text{ಪ} + 6\text{ಬ} - 7\text{ಮ})(12\text{ಪ} - 6\text{ಬ} + 7\text{ಮ}).$$

ಉ. ೪. ೧೦೦ಯ^೨ - ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ - ೨೫ಲ^೨ + ೬೦ಲಸ - ೩೬ಸ^೨. ಇಲ್ಲಿ
ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪದಗಳ ಭಾಗವು ೧೦ಯ - ೪ರ ವರ್ಗವಿದೆ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ
ಕಾಣುವದು. ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ ಮುಂಡಿಸುವದರಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಬದಲಾವಣೆ-
ಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಉಣಾ ೫ಲ - ೬ಸ ದ ವರ್ಗ ಎಂದು ಬರೆ-
ಯಲು ಬರುವದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned}
& \text{ಗಂಯ}^{\circ} - \text{ಒಂಯರ} + \text{ರ}^{\circ} - \text{ಅಜಲ}^{\circ} + \text{ಒಂಲಸ} - \text{ಒಒಸ}^{\circ} \\
& \equiv (\text{ಗಂಯ}^{\circ} - \text{ಒಂಯರ} + \text{ರ}^{\circ}) - (\text{ಅಜಸ}^{\circ} - \text{ಒಂಲಸ} + \text{ಒಒಸ}^{\circ}) \\
& \equiv (\text{ಗಂಯ} - \text{ರ})^{\circ} - (\text{ಅಜಲ} - \text{ಒಸ})^{\circ} \\
& \equiv \{ (\text{ಗಂಯ} - \text{ರ}) + (\text{ಅಜಲ} - \text{ಒಸ}) \} \{ \text{ಗಂಯ} - \text{ರ} - (\text{ಅಜಲ} - \text{ಒಸ}) \} * \\
& \equiv (\text{ಗಂಯ} - \text{ರ} + \text{ಅಜಲ} - \text{ಒಸ}) (\text{ಗಂಯ} - \text{ರ} - \text{ಅಜಲ} + \text{ಒಸ}).
\end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ಉಪ-ಫಮ-ಗಂಪ-ಗಜಮ. ೨. ಒಒಯ-ಅಜರ-ಗಂಯ-ಗಂರ.
೩. ಲಗಬ-ಗಒಮ-ಗಲಬ-ಲಮ. ೪. ಅಜರ-ಗಂಸ-ಗಂರ-ಒಒಸ.
೫. ಗುಳತ-ಗಒದ-ಅತ-ಅದ. ೬. ಗಂಪ-ಲಗಬ-ಗಂಪ-ಫಬ.
೭. ಲಯ-ಅರ-ಗಂಯ-ಗಂ. ೮. ಅಜರ-ಒಒಸ-ಗಂರ-ಗಒಸ.
೯. ಗುಳಯ-ಗಒಸ-ಗಲಯ-ಗಂಸ.
೧೦. ಲಯ-ಲಯಕ್ಷ-ಕ್ಷ-ಗಒನ.
೧೧. ಫಪ-ಅಪಮ-ಗಒಮ-ಒಳಗ.
೧೨. ಗಂಯ-ಅಜರ-ಒಂರಲ-ಫಲ.
೧೩. ಗುಳಯ-ಒಒಲ-ಒಂಲಸ-ಅಜಸ.
೧೪. ಒಒಪ-ಲಂಪ-ಅಜಬ-ಒಒ. ೧೫. ಲಗ-ಒದ-ಅದನ-ಫನ.
೧೬. ಗಒನ-ಲಳನಮ-ಫಲಮ-ಗಂವ.
೧೭. ಅತ-ಅತದ-ಒಒದ-ಗಂರ.
೧೮. ಜಯ-ಅಜರ-ಗಂರಲ-ಲಂಲ.
೧೯. ಅಜಯ-ಒಂಯರ-ಫರ-ಲ-ಗಂಲಸ-ಅಜಸ.
೨೦. ಉಪ-ಅಪಬ-ಫಬ-ಫಒ-ಒಒಮ-ಮ.
೨೧. ಫತ-ಒಂತದ-ಅದ-ಒಒ-ಗಂಧನ-ಫನ.
೨೨. ಕ-ಗು ಕಖ-ಫಖ-ಫಗ-ಒಂಗಫ-ಗಂಫ.

* ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಅಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲವೆಂಬ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಿಧವೇ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಡಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

೫.

ಪ^೩ ± ಮ^೩

೬. ೨೧. ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರಿಜು (ಪ^೩ + ಮ^೩) ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ (ಪ^೩ - ಮ^೩) ಇವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದೋ ಹೇಗೆ ಮತ್ತು ಬರುವದಾದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದರ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಮಗೆ ಈಗ ಮಾಡುವುದಿದೆ. ಹಿಂದೆ ಪ. ೪. ೭. ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರಿಜು ಮತ್ತು ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರಿಜು ಉಣಾ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು (ಪ + ಮ ಗುಣಿಲೆ ಪ^೨ - ಪಮ + ಮ^೨) ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರಿಜಿಗೆ (ಪ^೩ + ಮ^೩) ಸರಿ ಇರುವದು, ಮತ್ತು

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಮತ್ತು ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರಿಜು ಅಧಿಕ ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು (ಪ - ಮ ಗುಣಿಲೆ ಪ^೨ + ಪಮ + ಮ^೨) ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಗೆ (ಪ^೩ - ಮ^೩) ಸರಿ ಇರುವದು ಎಂದು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ

ಪ + ಮ ಮತ್ತು ಪ^೨ - ಪಮ + ಮ^೨ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪ^೩ + ಮ^೩, ಹಾಗೂ ಪ - ಮ ಮತ್ತು ಪ^೨ + ಪಮ + ಮ^೨ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪ^೩ - ಮ^೩ ಇರುವದು ಎಂದು ನಾವು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರುವೆವು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಾವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು. ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರಿಜು, ಅದರಂತೆಯೇ ವಜಾಬಾಕಿ, ಇವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅವು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವವು.

ಪ^೩ + ಮ^೩ ≡ (ಪ + ಮ) (ಪ^೨ - ಪಮ + ಮ^೨),

ಮತ್ತು ಪ^೩ - ಮ^೩ ≡ (ಪ - ಮ) (ಪ^೨ + ಪಮ + ಮ^೨).

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರಿಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ

ಅದರ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ಉಂಟಾಗುವವು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅವಯವವು, ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು, ವಜಾಬಾಕಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅವಯವವು ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಇಲ್ಲವೆ ಅಧಿಕ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದು. [ಎರಡು ಘನಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ಚಿನ್ಹವು (+ ಇಲ್ಲವೆ -) ಇರುವದೋ ಅದೇ ಮೊದಲಿನ ಅವಯವದಲ್ಲಿಯ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಚಿನ್ಹವು (- ಇಲ್ಲವೆ +) ಎರಡನೆಯ ಅವಯವದಲ್ಲಿಯ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಹಿಂದೆ ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಕೆಲಸವು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗುವದು.]

ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳು (ಇಲ್ಲವೆ ಸೂತ್ರಗಳು) ತತ್ಪತಃ ಒಂದೇ ಇರುವವು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಗರ್ಭಿತಾರ್ಥವು ಒಂದೇ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ) ಆಗುವದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಮೊದಲಿನದೇ ನಿಯಮವನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು) ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡನೆಯ ಸೂತ್ರವು ಹೇಗೆ ದೊರೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಪ^೨ - ಮ^೨ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ಪ^೨ + (-ಮ^೨) ಎಂದು ಅಂದರೆಯೇ ಪ^೨ + (-ಮ)^೨ ಎಂದು ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned}
 \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 &= \text{ಪ}^2 + (-\text{ಮ}^2) \\
 &= (\text{ಪ})^2 + (-\text{ಮ})^2 \\
 &= \{ \text{ಪ} + (-\text{ಮ}) \} \{ \text{ಪ} - \text{ಪ}(-\text{ಮ}) + (-\text{ಮ})^2 \} \\
 &= (\text{ಪ} - \text{ಮ})(\text{ಪ}^2 + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2).
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪ^೨ + ಮ^೨ ≡ (ಪ + ಮ)(ಪ^೨ - ಪಮ + ಮ^೨) ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ^೨ - ಮ^೨ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ.

೬.೨೨. ಪ^೨ + ಮ^೨ ಮತ್ತು ಪ^೨ - ಮ^೨ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು

ನಮಗೆ ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಪರಿಚ್ಛೇದ ೪.೧ ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ನಾವು

$$(\text{ಪ} + \text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 + 2\text{ಪಮ} (\text{ಪ} + \text{ಮ})$$

ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರುವೆವು. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಏನು ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$(\text{ಪ} + \text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 + 2\text{ಪಮ} (\text{ಪ} + \text{ಮ})$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 &\equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ})^2 - 2\text{ಪಮ} (\text{ಪ} + \text{ಮ}) \\ &\equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ}) \{ (\text{ಪ} + \text{ಮ})^1 - 2\text{ಪಮ} \} \\ &\equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ}) (\text{ಪ}^1 + 2\text{ಪಮ} + \text{ಮ} - 2\text{ಪಮ}) \\ &\equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ}) (\text{ಪ}^1 - \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^1) \end{aligned}$$

ಅದರಂತೆಯೇ ಪೆ. ೪.೨ ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ $(\text{ಪ} - \text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 - 2\text{ಪಮ} (\text{ಪ} - \text{ಮ})$ ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿದೆ. ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಕಂಡುಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$(\text{ಪ} - \text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 - 2\text{ಪಮ} (\text{ಪ} - \text{ಮ})$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 &\equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ})^2 + 2\text{ಪಮ} (\text{ಪ} - \text{ಮ}) \\ &\equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ}) \{ (\text{ಪ} - \text{ಮ})^1 + 2\text{ಪಮ} \} \\ &\equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ}) (\text{ಪ}^1 - 2\text{ಪಮ} + \text{ಮ}^1 + 2\text{ಪಮ}) \\ &\equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ}) (\text{ಪ}^1 + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^1) \end{aligned}$$

೬.೨೩. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಗೆ ಆಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡುವಾ.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೧. ಅ}^2 + ೨೨ಕ^2 &\equiv (\text{ಅ})^2 + (೨ಕ)^2 * \\ &\equiv (\text{ಅ} + ೨ಕ) \{ \text{ಅ} - \text{ಅ.೨ಕ} + (೨ಕ)^1 \} * \\ &\equiv (\text{ಅ} + ೨ಕ) (\text{ಅ} - ೨ಅಕ + ೪ಕ^1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೨. ೬೪ - ೧೬} &\equiv (೪)^2 - (೪)^2 * \\ &\equiv (೪ - ೪) \{ (೪)^1 + ೪. ೪ + ೪^1 \} * \\ &\equiv (೪ - ೪) (೧೬ + ೪೪ + ೪). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ಉ. ೩. } ೧೨೫ರ^೩-೮ಸ^೩ &\equiv (೫ರ)^೩ - (೨ಸ)^೩ * \\
&\equiv (೫ರ-೨ಸ) \{ (೫ರ)^೨+೫ರ.೨ಸ+(೨ಸ)^೨ \} * \\
&\equiv (೫ರ-೨ಸ) (೨೫ರ^೨+೧೦ರಸ+೪ಸ^೨).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ಉ. ೪. } ೫೪ಲ^೩+೧೨೮ವ^೩ &\equiv ೨(೨೭ಲ^೩+೬೪ವ^೩) \\
&\equiv ೨ \{ (೩ಲ)^೩ + (೪ವ)^೩ \} * \\
&\equiv ೨(೩ಲ+೪ವ)(೯ಲ^೨-೧೨ಲವ+೧೬ವ^೨).
\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಕೆಗೆ ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟ ದ್ವಿಪದಿಯೊಳಗಿನ ಎರಡೂ ಪದಗಳು ಘನ-
ಗಲ್ಲಿವೆಂದೆನಿಸುವದು, ಅದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ೨
ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಗುಣಪೃಥ-
ಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ
ಗುಣಕವಿರುವದನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಅದರಂತೆ
ಇಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಕಂಪಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಎರಡು ಪದಗಳು
ಎರಡು ಘನವಿರುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
\text{ಉ. ೫. } ೮೧ಪ^೩ಯ^೩ - ೧೯೨ಪ^೩ರ^೩ \\
&\equiv ೩ಪ^೩(೨೭ಯ^೩ - ೬೪ರ^೩) \\
&\equiv ೩ಪ^೩ \{ (೩ಯ)^೩ - (೪ರ)^೩ \} \\
&\equiv ೩ಪ^೩(೩ಯ-೪ರ) (೯ಯ^೨+೧೨ಯರ+೧೬ರ^೨).
\end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ೩ಪ^೩ ಇದು ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ
ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದರೆ ಕಂಪಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ
ಎರಡು ಪದಗಳು ಎರಡು ಘನಗಳ ನಜಾಬಾಕಿಯಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡು
ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
\text{ಉ. ೬. } ೬೫ಅ^೩+೧೩೫ಅ &\equiv ೫ಅ(೧೩ಅ^೩+೨೭) \\
&\equiv ೫ಅ \{ (೫ಅ)^೩ + (೩)^೩ \} \\
&\equiv ೫ಅ \{ (೫ಅ+೩) (೨೫ಅ^೨-೧೫ಅ+೯) \}.
\end{aligned}$$

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ತರುವಾಯ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಲು
ಬರುವದು ಮತ್ತು ಹಾಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಲು ಏನೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

ಉ. ೭. ಲ(೨೨-೩ಕ)² - (೩೨-೫ಕ)²

≡ ಲಪ² - ಮ²* [೨೨-೩ಕದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು
೩೨-೫ಕದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಬರೆದು]

≡ (೨ಪ - ಮ)(೪ಪ² + ೨ಪಮ + ಮ²)*

≡ { ೨(೨೨-೩ಕ) - (೩೨-೫ಕ) } { ೪(೨೨-೩ಕ)²
+ ೨(೨೨-೩ಕ)(೩೨-೫ಕ) + (೩೨-೫ಕ)² }

≡ (೪೨ - ೬ಕ - ೩೨ + ೫ಕ) { ೪(೪೨² - ೧೨೨ಕ + ೯ಕ²)
+ ೨(೬೨² - ೧೯೨ಕ + ೧೫ಕ²) + ೯೨² - ೩೦೨ಕ + ೨೫ಕ² }

≡ (೨ - ಕ)(೧೬೨² - ೪೨೨ಕ + ೩೬ಕ² + ೧೨೨² - ೩೦೨ಕ + ೩೦ಕ²
+ ೯೨² - ೩೦೨ಕ + ೨೫ಕ²)

≡ (೨ - ಕ)(೩೭೨² - ೧೧೬೨ಕ + ೯೧ಕ²).

ಉ. ೮. ೨೭ರ² - ೬೪ಸ² - ೧೫ರ + ೨೦ಸ

≡ (೨೭ರ² - ೬೪ಸ²) - (೧೫ರ - ೨೦ಸ)

≡ (೩ರ - ೪ಸ)(೯ರ² + ೧೨ರಸ + ೧೬ಸ²) - ೫(೩ರ - ೪ಸ)

≡ (೩ರ - ೪ಸ)(೯ರ² + ೧೨ರಸ + ೧೬ಸ² - ೫).

ಉ. ೯. ಪ² - ಮ² ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಿಂದ ಮಂಡಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಬರುವದು. ಪ² ಮತ್ತು ವ² ಇವು ಪ² ಮತ್ತು ಮ² ಗಳ ಘನಗಳಿವೆ, ಅದರಂತೆಯೇ ಪ² ಮತ್ತು ಮ² ಗಳ ವರ್ಗಗಳಾದರೂ ಇರುವವು. ಅದುದರಿಂದ ಪ² - ಮ² ಈ ರಾಶಿಯು ಎರಡು ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುವಂತೆಯೇ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಸಹ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ಮೊದಲು ಅದು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇದೆಯೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವಾ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ,

* ಈ ಎರಡು ಹಂತಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ ಎಂತಲ್ಲ. ನಮ್ಮದು ಅಷ್ಟು ತರಬೇತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

$$\begin{aligned}
ಪ^+ - ಮ^+ &\equiv (ಪ^+)^+ - (ಮ^+)^+ \\
&\equiv (ಪ^+ + ಮ^+)(ಪ^+ - ಮ^+) \\
&\equiv (ಪ+ಮ)(ಪ^+-ಪಮ+ಮ^+)(ಪ-ಮ)(ಪ^++ಪಮ+ಮ^+).
\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪ⁺ - ಮ⁺ ದ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಅವಯವಗಳು ಬರುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಈಗ ನಾವು ಪ⁺ - ಮ⁺ ಈ ರಾಶಿಯು ಎರಡು ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅದರ ಅವಯವ-ಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವಾ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
ಪ^+ - ಮ^+ &\equiv (ಪ^+)^+ - (ಮ^+)^+ \\
&\equiv (ಪ^+ - ಮ^+)(ಪ^+ + ಪ^+ಮ^+ + ಮ^+) \\
&\equiv (ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ)(ಪ^+ + ಪ^+ಮ^+ + ಮ^+).
\end{aligned}$$

ಯಾವದೇ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೂ ಕೊನೆಗೆ ಅವೇ ಅವಯವಗಳು ಬರಬೇಕು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಹೊಳೆಯುವದೇನೆಂದರೆ ಪ⁺ + ಪ⁺ಮ⁺ + ಮ⁺ ದ ಪ⁺ - ಪಮ⁺ + ಮ⁺ ಮತ್ತು ಪ⁺ + ಪಮ⁺ + ಮ⁺ ಇವು ಅವಯವಗಳಿರಬೇಕು. ಹಿಂದೆ ಪ. ೫. ೨ರಲ್ಲಿ ಪ⁺ + ಪಮ⁺ + ಮ⁺ ಮತ್ತು ಪ⁺ - ಪಮ⁺ + ಮ⁺ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪ⁺ + ಪ⁺ಮ⁺ + ಮ⁺ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಾವು ಮುಂದಿನಂತೆ ಅನ್ನಬಹುದು. ಪ⁺ + ಪ⁺ಮ⁺ + ಮ⁺ ದ ಪ⁺ + ಪಮ⁺ + ಮ⁺ ಮತ್ತು ಪ⁺ - ಪಮ⁺ + ಮ⁺ ಇವು ಅವಯವಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ನಮಗೆ ಪ⁺ + ಪ⁺ಮ⁺ + ಮ⁺ ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನಾದರೂ ತಿಳಿಯಲು ಬರುವದು. ಪ⁺ + ಪ⁺ಮ⁺ + ಮ⁺ ಇದು ಪ⁺ + ಮ⁺ ದ ವರ್ಗವಿದೆ. ಮತ್ತು 'ಪ⁺ಮ⁺' ವು 'ಪಮ' ಇದರ ವರ್ಗವಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ⁺ + ಪ⁺ಮ⁺ + ಮ⁺ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದೆಂಬ ಕಲ್ಪನೆಯು ಹೊಳೆಯುವದಿಲ್ಲವೇ? ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
ಪ^+ + ಪ^+ಮ^+ + ಮ^+ &\equiv ಪ^+ + ೨ಪ^+ಮ^+ - ಪ^+ಮ^+ + ಮ^+ \\
&\equiv ಪ^+ + ೨ಪ^+ಮ^+ + ಮ^+ - ಪ^+ಮ^+ \\
&\equiv (ಪ^+ + ಮ^+)^+ - (ಪಮ)^+ \\
&\equiv (ಪ^+ + ಮ^+ + ಪಮ)(ಪ^+ + ಮ^+ - ಪಮ) \\
&\equiv (ಪ^+ + ಪಮ + ಮ^+)(ಪ^+ - ಪಮ + ಮ^+).
\end{aligned}$$

ಬೀಜಗಣಿತದೊಳಗಿನ ಇದೊಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಇರುವದು. ಇದು ಗುಣಸೃಷ್ಟಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಲ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದರಿಂದ ಅದನ್ನು ನಾವು ಚನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿಶೇಷವೆಂಬುದೇನೂ ಮಾಡಿಲ್ಲ. ನಡುವಿನ ಪದವಾದ ಪೌಮೌವನ್ನು ಪೌಮೌ - ಪೌಮೌ ಈ ಅನುಕೂಲವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಗುಣಕ-ಸೂತ್ರವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಯಾವದೇ ಪದವನ್ನು ನಿಂಗಡಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಿ, ಗುಣಸೃಷ್ಟಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವ ಗುಣಕ-ಸೂತ್ರಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಯೌ + ಗಂಯ + ೨೧ - ರೌ - ೪ರ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಸೃಷ್ಟಕರಣವನ್ನು ನಮಗೆ ಮಾಡುವದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಯೌ + ಗಂಯ + ೨೫ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪದಗಳಿದ್ದರೆ ಅದೊಂದು ವರ್ಗವಾಗುವದು. ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಆಗಲು ೨೧ ನ್ನು ೨೫-೪ ಹೀಗೆ ಮಂಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಮುಂದೆ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಹೀಗೆ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಉಳಿದ ಪದಗಳದಾದರೂ ಒಂದು ವರ್ಗವಾಗುವದು, ಮತ್ತು ರಾಶಿಗೆ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪವು ದೊರೆಯುವದು. ಇದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಯೌ} + \text{ಗಂಯ} + ೨೧ - \text{ರೌ} - ೪ರ &\equiv \text{ಯೌ} + \text{ಗಂಯ} + ೨೫ - ೪ - \text{ರೌ} - ೪ರ \\
 &\equiv \text{ಯೌ} + \text{ಗಂಯ} + ೨೫ - \text{ರೌ} - ೪ರ - ೪ \\
 &\equiv (\text{ಯೌ} + \text{ಗಂಯ} + ೨೫) - (\text{ರೌ} + ೪ರ + ೪) \\
 &\equiv (\text{ಯ} + ೫) - (\text{ರ} + ೨) \\
 &\equiv (\text{ಯ} + ೫ + \text{ರ} + ೨) (\text{ಯ} + ೫ - \text{ರ} - ೨) \\
 &\equiv (\text{ಯ} + \text{ರ} + ೭) (\text{ಯ} - \text{ರ} + ೩).
 \end{aligned}$$

ಸೌ $\pm ೨ಸಮ + ಮ$ $\equiv (ಸ \pm ಮ)$ ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಪದವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವಂಥ ಎರಡು ಪದಗಳೊಡನೆ ಮೂರನೆಯ ಯಾವ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆ ತ್ರಿಸದಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಬಲ್ಲದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಪದವು ಎರಡನೆಯ ಪದದ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರದ ವರ್ಗವಿರುವದು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $೯ಅ \pm ೩೦ಅ$ ಇದೊಡನೆ $(೧೫ಅ \div ೩೦)$, ಅಂದರೆ (೫) ಅಂದರೆಯೇ ೨೫ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಸದಿಯು $(೯ಅ \pm ೩೦ಅ + ೨೫)$ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ $(೩ಅ \pm ೫)$ ಇರುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಪದಗಳು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಸದಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಿರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $೧೬ಅ + ೪೯$ ದ ಜೊತೆಗೆ ೨.೪೨ , ೭ ಕೆ, ಅಂದರೆ ೫೬ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಸದಿಯು $(೧೬ಅ \pm ೫೬ಅ + ೪೯)$ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ $(೪ಅ \pm ೭)$ ಆಗುವದು.

ಉ. ೧೦. ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ೬೪ ರ^೨ - ೭೨ ಸ^೨ ಈ ಒಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಗುಣವೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಇದನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಿಂದ ಮಂಡಿಸಬಹುದು.

೬೪ ರ^೨ - ೭೨ ಸ^೨

$$\equiv (೮ರ)^೨ - (೨೭ಸ)^೨$$

$$\equiv (೮ರ + ೨೭ಸ)(೮ರ - ೨೭ಸ)$$

$$\equiv (೨೮ + ೨೭ಸ)(೪ರ - ೭ರಸ + ೯ಸ)(೨ರ - ೨ಸ)(೪ರ + ೭ರಸ + ೯ಸ).$$

೬೪ ರ^೨ - ೭೨ ಸ^೨

$$\equiv (೪ರ)^೨ - (೯ಸ)^೨$$

$$\equiv (೪ರ - ೯ಸ)(೧೬ರ + ೩೬ರಸ + ೮೧ಸ)$$

$$\equiv (೨ರ + ೨೭ಸ)(೨ರ - ೨ಸ)(೧೬ರ + ೭೨ರಸ + ೮೧ಸ - ೩೬ರಸ)*$$

$$\equiv (ಅರ + ಋಸ)(ಅರ - ಋಸ) \{ (ಅರ + ಋಸ)^2 - (ಅರಸ)^2 \}$$

$$\equiv (ಅರ + ಋಸ)(ಅರ - ಋಸ)(ಅರ + ಅರಸ + ಋಸ)(ಅರ - ಅರಸ + ಋಸ).$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೫.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. (ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದಲೇ ಬಿಡಿಸಿರಿ.)

- | | | |
|-------------------------|----------------------|------------------|
| ೧. ಯಶಿ + ಅರಸಿ. | ೨. ಲಶಿ - ಲವಶಿ. | ೩. ಅರಸಿ + ಅರಸಸಿ. |
| ೪. ಅರಸಪಶಿ + ಅರಸರಸಿ. | ೫. ಅರ - ಅರಸಸಿ. | ೬. ಲ + ಅರಸಪಶಿ. |
| ೭. ಯಶಿ - ೧೦೦೦ ಕ್ಷಶಿ. | ೮. ಅರಸಪಶಿ - ಅರಸಮಶಿ. | |
| ೯. ಅರಸ - ಅರಸಪಶಿ. | ೧೦. ಅರಸಕ್ಷಶಿ - ೧. | |
| ೧೧. ಯಶಿ - ೧೨. | ೧೨. ಲಕ್ಷ - ಪಶಿ. | |
| ೧೩. ಲವಶಿ - ೧೨ ಸಶಿ. | ೧೪. ಪಶಿ - ೧೨ ಬಶಿ. | |
| ೧೫. ಅರಸರಸಿ + ಅರಸಪಶಿ. | ೧೬. ಅರಸದಶಿ + ಲವಶಿ. | |
| ೧೭. ಅರ + ಅರಸರಸಿ. | ೧೮. ಕಶಿಗಶಿ + ಲ. | |
| ೧೯. ಅರ - ಬಶಿಮಶಿ. | ೨೦. ಲವಶಿಬಶಿ - ಅರಸ. | |
| ೨೧. ಲಲಲಲಲ - ೬ಗಶಿ. | ೨೨. ಲಕಶಿ - ಅರಸಗಶಿ. | |
| ೨೩. ಅರಸಪಶಿ + ಅರಸಪಶಿಪಶಿ. | ೨೪. ಅರಸಪಶಿ + ಅರಸಬಶಿ. | |

* ಇಲ್ಲಿ ಅರಸಪಶಿ ವನ್ನು ಅರಸಪಶಿ - ಅರಸಪಶಿ ಎಂದು ಮಂಡಿಸಿ ಅರಸ + ಅರಸಪಶಿ + ಅರಸಪಶಿ ಈ ಪದಾವಲಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಅರಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಪಶಿ ಮತ್ತು ಲವಶಿ ದ ಸಲುವಾಗಿ ಮಶಿ ಬರೆದು ಈ ಪದಾವಲಿಯನ್ನು ಪಶಿ + ಪಶಿಪಶಿ + ಮಶಿ ದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಮತ್ತು ಬಳಿಕ ಪಶಿ + ಪಶಿಮಶಿ + ಮಶಿ $\equiv (ಪಶಿ + ಪಮಶಿ + ಮಶಿ)(ಪಶಿ - ಪಮಶಿ + ಮಶಿ)$ ಈ ಗುಣಕ-ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಎರಡೂ ರೀತಿಗಳ ತುಲನೆಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಮಾರ್ಗವು ಅನುಕೂಲವಾದದ್ದು ಹಾಗೂ ಸುಲಭವಾದದ್ದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೃಥಕ್ರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡು ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಈ ಎರಡೂ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಾಗ ಅದನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವದು ಇಷ್ಟವಾಗುವದು.

ವಿಳನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕೆರಣ (ಮುಂದೆಸಾಗಿದುದು)

ಪಯ್ + ಬಯ + ನು

೧.

೭.೧. ಇನ್ನು ಪಯ್ + ಬಯ + ನು ದಂಥ ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕೆರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಪದಗಳು ಮೂರು. ಯದ ವರ್ಗವಿರುವಂಥ ಒಂದು ಪದ, ಯದ ಪ್ರಥಮ ಘಾತವಿರುವಂಥ ಒಂದು ಪದ, ಮತ್ತು ಅದರ ಅಭಾವವಿರುವ, ಅಂದರೆಯೇ ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಅದು ಇಲ್ಲವೋ ಅಂಥ ಒಂದು ಪದ. ಪ ಮತ್ತು ಬ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ್ ಮತ್ತು ಯ ಇವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ನಮ್ಮ ಇಂದಿನ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಷೇತ್ರದ ಮರ್ಯಾದೆಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಂಡರೆ, ನಾವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾದ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ, ಬ, ಮ ಇವು ಜ್ಞಾತ (ವ್ಯಕ್ತ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಅಂದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ೬ಯ್ + ೧೭ಯ್ + ೫, ೧೨ರ - ೨೩ರ + ೧೦, ೨೧ರ - ೨೩ರ - ೧೪, ೫ - ೭ - ೮, ಈ ತರಹದ್ದಿರುವವು. ಇಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ನಾಲ್ಕು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೬, ಬ = ೧೭, ಮ = ೫, ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ, ಪ = ೧೨, ಬ = - ೨೩, ಮ = ೧೦, ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೨, ಬ = ೩, ಮ = - ೧೪, ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೧, ಬ = - ೭, ಮ = - ೮.

೭.೨. ಪಯ್ + ಬಯ + ನು ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ 'ಪ', 'ಬ', ಮತ್ತು 'ಮ' ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವಾದ ಗುಣಕವು ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಗೃಹೀತವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದೆ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂರೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೪೧ರ - ೨೩ರ - ೨೮ ಇಂಥ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣಗುಣಕವೆಂದು ತೋರಿಬರುವ ೨ ಈ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಕೊಟ್ಟ

ರಾಶಿಯನ್ನು $೨(೨ವ್ + ೩ವ - ೧೪)$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ತರುವಾಯ $೨ವ್ + ೩ವ - ೧೪$ ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಸಹಜವಾಗಿ $ಪಯ್ + ಬಯ + ಮ$ ಇದರಲ್ಲಿ **ವಿಕಪದ** ಗುಣಕವಿರದೇ ಅದರೊಳಗಿನ ಗುಣಕಗಳು **ವಿಕಘಾತ ದ್ವಿಪದ** ಅಂದರೆ **ಅಯ + ಕ** ಈ ಸ್ವರೂಪದವು ಇರುವವು.

೭.೩. ಇನ್ನು ನಾವು ಇಂಥ ದ್ವಿಪದಿಗಳ (ಅಯ + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದ) ನಾಲ್ಕು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ತರುವಾಯ ಆ ಗುಣಾಕಾರದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾ, ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡುಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

(೧)	(೨)
ಅಯ + ೫	೩ಯ - ೫
೩ಯ + ೪	೮ಯ - ೭
-----	-----
೬ಯ ^೨ + ೧೫ಯ	೨೪ಯ ^೨ - ೪೦ಯ
+ ೮ಯ + ೨೦	- ೨೧ಯ + ೩೫
-----	-----
೬ಯ ^೨ + ೨೩ಯ + ೨೦	೨೪ಯ ^೨ - ೬೧ಯ + ೩೫
 (೩)	 (೪)
೭ಯ - ೩	೪ಯ - ೫
೨ಯ + ೯	೩ಯ + ೧
-----	-----
೧೪ಯ ^೨ - ೬ಯ	೧೨ಯ ^೨ - ೧೫ಯ
+ ೬೩ಯ - ೨೭	+ ೪ಯ - ೫
-----	-----
೧೪ಯ ^೨ + ೫೭ಯ - ೨೭	೧೨ಯ ^೨ - ೧೧ಯ - ೫

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಗುಣಾಕಾರವು $ಪಯ್ + ಬಯ + ಮ$ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದು ಅದರ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಲಾದ ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಮೊದಲನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದ್ದು, ಅದರ ಕೊನೆಯ ಪದವು ಅವುಗಳ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ನಡುವಿನ ಪದವು ಒಂದು ದ್ವಿಪದಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಕೊನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯದರ ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು ಇರುವದು.

ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವ ಮತ್ತೂ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ಗುಣಕ-
ಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳು ಒಂದೇ ತರಹದವು (+ ಮತ್ತು +,
ಇಲ್ಲವೆ - ಮತ್ತು -) ಇದ್ದರೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು
+ ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳು ಭಿನ್ನ
(+ ಮತ್ತು -) ಇದ್ದರೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು
- ಇರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು
+ ಇದ್ದಾಗ ಅದರಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು ಮತ್ತು ಗುಣಕದಲ್ಲಿಯ
ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತವೆ.

೭.೪. ಇಷ್ಟು ವಿವೇಚನದ ನಂತರ ಪಯಃ + ಬಯಃ + ಮದಂಧ
ಸ್ವರೂಪದ ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಗುಣಪ್ರಕರಣಕ್ಕಾಗಿ
ಕೊಟ್ಟರೆ ಅದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯಲು ಬರಬೇಕು.
ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ೨ಯಃ + ೧೧ಯಃ + ೫ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದು-
ಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇದರಲ್ಲಿ ೨ಯಃ + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಎರಡು ಗುಣಕಗಳು
ಇರುವವು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಇನ್ನು ೨ಯಃ ಇದರಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು
೨ಯ ಇವೇ ಯ ವರ್ಣವುಳ್ಳ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ಹೊರಡಬಲ್ಲವು.
ಸಹಜವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳು (ಯ....) (೨ಯ....) ಈ
ಸ್ವರೂಪದವು ಇರಬಹುದು. ಇನ್ನು ನಾವು ಈ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡನೆಯ
ಪದಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವಾ. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ
ಕೊನೆಯ ಪದವು ೫ ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ೧ ಮತ್ತು ೫ ಇವೇ ಎರಡು ಅವಯವ-
ಗಳು ಹೊರಡುವವು. ಮತ್ತು ಇವೆರಡೂ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿಯ
ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದವು
ಧನವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ೧ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಹಿಂದೆ ಯಾವದಾದರೂ ಒಂದೇ
ಚಿನ್ಹವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದವು **ಧನವಿದೆ-**
ಯಾದ್ದರಿಂದ ಆ ಚಿನ್ಹಗಳು + ಇರುವವು. ಇನ್ನು ೧ ಇದು ಯ ದೊಡನೆ
ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು ೫ ಎರಡನೆಯ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಇರುವದೋ
ಅಥವಾ ೫ ಇದು ಯ ದೊಡನೆ ಇದ್ದು ೧ ಇದು ಎರಡನೆಯ ಕಂಸದಲ್ಲಿ
ಇರುವದೋ ಎಂಬುದಷ್ಟೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು. ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ಗುಣಕ-

ಗಳನ್ನು (ಯ + ೧)(ಅಯ + ೫) ಎಂದು ಮಂಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು; ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ (ಯ + ೫)(ಅಯ + ೧) ಎಂದು ಮಂಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ಗ್ರಾಹ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗುಣಾಕಾರಮಾಡಿ ನೋಡುವಾ. ಮೊದಲನೆಯ ಜೋಡಿಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಅಯ^೨ + ೭ಯ + ೫; ಎರಡನೆಯ ಜೋಡಿಯದು ಅಯ^೨ + ೧೧ಯ + ೫. ಅಂದಮೇಲೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಸ್ವಧಕ್ಕರಣವು (ಯ + ೫)(ಅಯ + ೧) ಎಂದಿರುವದು.

[ವಿ. ಸೂ.— ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದ ಬಳಿಕ ಸಾಧ್ಯವೂ ಅನುಕೂಲವೂ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಗುಣಿಸಿ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು.]

೭.೫. ಇದರಂತೆಯೇ ಗುಣಸ್ವಧಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಯ^೨-೧೧ಯ+೫ ಈ ಎರಡನೆಯದೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಯ^೨ ಇದರಲ್ಲಿ ಯ ವರ್ಣವುಳ್ಳ ಅವಯವಗಳು ಯ, ಅಯ ಮತ್ತು ಅಯ, ೫ಯ ಇವೇ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಇರುವದು ಶಕ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳು (ಯ....)(ಅಯ....) ಅಥವಾ (ಅಯ....)(೫ಯ....) ಈ ಸ್ವರೂಪದವಿರಬೇಕು. ಮತ್ತು ೫ರ ಅವಯವಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೫ ಇವೇ ಇರುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ೫ರ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು + ಇದ್ದು ನಡುವಿನ ಪದವು ಋಣವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ - ೧ ಮತ್ತು - ೫ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಗುಣಕಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುವವು :

(ಯ-೧)(ಅಯ-೫); (ಯ-೫)(ಅಯ-೧); (ಅಯ-೧)(೫ಯ-೫); (ಅಯ-೫)(೫ಯ-೧).

ಇನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದು ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಸಂಭವಿಸಲಾರವು. ಕಾರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಅವೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡನೆಯ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ೫ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಾದ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲೇ ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆರಡೂ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಅಗ್ರಾಹ್ಯವಿರುವವು. ಇನ್ನು ಉಳಿದವು ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕಾರಗಳು. ಎರಡನೆಯ ಜೋಡಿಯ ಗುಣಾಕಾರವು
 $೬ಯಃ - ೧೯ಯ + ೩$ ಆಗುವದು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಜೋಡಿಯದು
 $೬ಯಃ - ೧೧ಯ + ೩$ ಆಗುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ
 $೬ಯಃ - ೧೧ಯ + ೩ \equiv (೨ಯ - ೩)(೩ಯ - ೧)$.

೭.೬. ೧೦ಯಃ + ೧೧ಯ - ೬ ಈ ಮತ್ತೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು
 ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ೧೦ಯಃ ದ ಶಕ್ಯವಿರುವ
 ಅವಯವಗಳು ಯ ಮತ್ತು ೧೦ಯ, ಅಥವಾ ೨ಯ ಮತ್ತು ೫ಯ ಇವೇ
 ಇರುತ್ತವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಕಗಳು (ಯ....)(೧೦ಯ....) ಅಥವಾ
 (೨ಯ....)(೫ಯ....) ಈ ಸ್ವರೂಪದವಿರುವವು. ಇನ್ನು ನಾವು ಕೊಟ್ಟ
 ರಾಶಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ (- ೬ರ) ವಿಚಾರಮಾಡುವಾ. ೬ರ ಅವಯವ-
 ಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೬, ಅಥವಾ ೨ ಮತ್ತು ೩ ಹೀಗೆ ಇರುವವು. ೬ರ ಹಿಂದಿನ
 ಚಿನ್ಹವು - ಇರುವದರಿಂದ ಅದರ ಒಂದು ಅವಯವದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು +
 ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅವಯವದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು - ಇರುವದು. ಈಗ
 ನಾವು ೧ ಮತ್ತು ೬ ಈ ಜೋಡಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ೬ ಇದು
 ೧೦ಯ ಅಥವಾ ೨ಯ ಈ ಜೋಡಿಯೊಡನೆ ಇರಲಾರದು. ಇದ್ದರೆ ೨ ಇದು
 ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಾಗುವದು, ಆದರೆ ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಿಗೆ
 ಇಂಥ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ೨ ಮತ್ತು ೩ ಈ ಜೋಡಿಯ
 ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ೨ ಇದು ೧೦ಯ ಅಥವಾ
 ೨ಯ ಇವುಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಇರಲಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ರಾಶಿಯ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದ
 ಗುಣಕಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ:

(ಯ+೬)(೧೦ಯ-೧); (ಯ-೬)(೧೦ಯ+೧); (ಯ+೨)(೧೦ಯ-೩);
 (ಯ-೨)(೧೦ಯ+೩); (೨ಯ-೧)(೫ಯ+೬); (೨ಯ+೧)(೫ಯ-೬);
 (೨ಯ+೩)(೫ಯ-೨); (೨ಯ-೩)(೫ಯ+೨).

ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಜೋಡಿಯು
 ಇಷ್ಟವಿದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುವದು. ಆದರೆ ಈ ಎಂಟೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು
 ಮಾಡುವ ಕಾರಣವೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಮೊದಲನೆಯ
 ಪದವು ೧೦ಯಃ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದವು - ೬ ಇದ್ದೇ ಇರುವದು.

ನಡುವಿನ ಪದದ್ವಷ್ಟೇ ಪ್ರಶ್ನೆ; ಯಾವ ಜೋಡಿಯು ಬೇಕಾದದ್ದು ಎಂಬುದನ್ನು
ನಡುವಿನ ಪದದ ಮೇಲಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದಿದೆ. (ಯ+೬)(೧೦ಯ-೧)

ದಂಥ ದ್ವಿಪದ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಯ ತ್ರಿಪದ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ
ಪದವನ್ನು ಹೇಳುವುದು ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಮಾತಾಗಿದೆ. ಹೊರಗಿನ ಪದಗಳ
ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಒಳಗಿನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು
ಇದೇ ನಡುವಿನ ಪದ. ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಹೊರಪದಗಳ (+ಯ
ಮತ್ತು -೧ ಇವುಗಳ) ಗುಣಾಕಾರವು -ಯ, ಒಳಪದಗಳ (+೬ ಮತ್ತು
+೧೦ಯ ಇವುಗಳ) ಗುಣಾಕಾರವು +೬೦ಯ, ಮತ್ತು ಆ ಗುಣಾಕಾರಗಳ
ಬೇರೀಜು +೫ಯ. ಇದರಂತೆಯೇ ಉಳಿದ ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ-
ಗಳೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿ ಅವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ
-೫ಯ, +೧೭ಯ, -೧೭ಯ, +೭ಯ, -೭ಯ, +೧೧ಯ ಮತ್ತು
-೧೧ಯ, ಹೀಗೆ ಬರುವವು. ಗುಣಸೃಢಕೃರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ
ನಡುವಿನ ಪದವು+೧೧ಯ ಇದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ (೨ಯ+೩)(೫ಯ-೨)
ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಸೃಢಕೃರಣವು.

೭.೭. ಪಯ^೨ + ಬಯ + ಮು ಈ ತರಹದ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣ-
ಸೃಢಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ನೋಡಿದ ರೀತಿಯಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ (ಪ. ೭.೪)
ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ (ಪ. ೭.೫) ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು
ನಮಗೆ ಬಹು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬಂದಿತು. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಉದಾ-
ಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ನಮಗೆ ಆ ರೀತಿಯು
ಅಷ್ಟೊಂದು ಅನುಕೂಲವಲ್ಲದೆನಿಸುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಬಹುಶಃ ಅದು ಸ್ವಲ್ಪ
ಬೇಸರಿಕೆಯದೆನಿಸಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂಥ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಸೃಢಕೃರಣ-
ವನ್ನು ಮಾಡಲು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವಾದ ಮಾರ್ಗ-
ವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ಯತ್ನಿಸುವಾ. ಆದರೆ ಹಾಗೆ
ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ನಮಗೆ ಈ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ
ತೆಗೆಯುವ ರೂಢಿಯಾಗಬೇಕೆಂದು ಮುಂದಿನ ಸಂಗ್ರಹದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ
ಗುಣಸೃಢಕೃರಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡುವಾ. ಗುಣಕಗಳನ್ನು
ತೆಗೆಯಲಾರಂಭಿಸಿದ ತರುವಾಯ ನಮಗೆ ಈ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಅವಯವ-
ಗಳನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದೆಂಬುದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

- | | |
|---|--|
| ೧. ೨ಯ ^೨ - ೭ಯ + ೬. | ೨. ೨ಯ ^೨ - ೯ಯ + ೪. |
| ೩. ೬ಯ ^೨ + ೧೭ಯ + ೫. | ೪. ೧೨ರ ^೨ - ೨೩ರ + ೧೦. |
| ೫. ೬ಯ ^೨ + ೧೦ - ೧. | ೬. ೧೬ರ ^೨ - ೨೬ರ + ೩. |
| ೭. ೨ನ ^೨ + ೩ನ - ೧೪. | ೮. ೫ ^೨ - ೭೫ - ೮. |
| ೯. ೮ಯ ^೨ - ೨೬ಯ - ೭. | ೧೦. ೧೫ನ ^೨ + ೭ನ - ೨. |
| ೧೧. ೧೪ನ ^೨ - ೧೯ನ - ೩. | ೧೨. ೨೨ನ ^೨ + ೩೭ನ + ೬. |
| ೧೩. ೧೮ನ ^೨ - ೧೫ನ + ೨. | ೧೪. ೭ನ ^೨ + ೩೨ನ - ೧೫. |
| ೧೫. ೧೦ನ ^೨ + ೨೧ನ - ೧೦. | ೧೬. ೧೭ನ ^೨ - ೫ನ - ೨. |
| ೧೭. ೯ರ ^೨ - ೧೧ರ + ೨. | ೧೮. ೨೨ಯ ^೨ - ೭೭ಯ + ೩೩. |
| ೧೯. ೨೪ನ ^೨ + ೮ನ ^೨ - ೧೦ನ. | ೨೦. ೪೨ನ ^೨ - ೯೧ನ ^೨ + ೪೨ನ. |
| ೨೧. ೯ನ ^೨ - ೪೨ನ ^೨ - ೧೫ನ ^೨ . | |

೭.೮. ಇನ್ನು ನಾವು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವಾದ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವಾ. ಕೆಳಗೆ ೨ಯ + ೬ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಗಳ ನಾಲ್ಕು ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ನಡುವಿನ ಹಂತಗಳೊಡನೆ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾ, ಮತ್ತು ಏನು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$\begin{aligned}
 (೨ಯ+೫)(೨ಯ+೭) &\equiv ೨ಯ(೨ಯ+೫)+೭(೨ಯ+೫) . &&....೧ \\
 &[\equiv ೪.೨ಯ^೨+೫.೨ಯ+೪.೭ಯ+೫.೭]. &&....೨೮* \\
 &\equiv ೮ಯ^೨ + ೧೦ಯ + ೨೮ಯ + ೩೫ . &&.... ೨೮ \\
 &\equiv ೮ಯ^೨ + ೩೮ಯ + ೩೫ &&.... ೩
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (೩ಯ-೭)(೫ಯ-೨) &\equiv ೫ಯ(೩ಯ-೭)-೨(೩ಯ-೭) &&....೧ \\
 &[\equiv ೩.೫ಯ^೨-೭.೫ಯ-೩.೨ಯ+೭.೨]. &&....೨೮* \\
 &\equiv ೧೫ಯ^೨ - ೩೫ಯ - ೬ಯ + ೧೪ &&.... ೨೮ \\
 &\equiv ೧೫ಯ^೨ - ೪೧ಯ + ೧೪ &&.... ೩
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ಓಯ-೧)(ಓಯ+೩) &\equiv ಓಯ(ಓಯ-೧) + ೩(ಓಯ-೧) \dots\dots ೧ \\
 [&\equiv ಓ.ಓಯ^೨-೧೧.ಓಯ+ಓ.೩ಯ-೧೧.೩ \dots\dots ೨೮* \\
 &\equiv ೪ಓಯ^೨-೨ಓಯ+೧೮ಯ-೩೩ \dots\dots ೨೮ \\
 &\equiv ೪ಓಯ^೨ - ೫೯ಯ - ೩೩ \dots\dots ೩ \\
 (ಉಯ+೯)(ಓಯ-೨) &\equiv ಓಯ(ಉಯ+೯) - ೨(ಉಯ+೯) \dots\dots ೧ \\
 [&\equiv ಉ.ಓಯ^೨+೯.ಓಯ-ಉ.೨ಯ-೯.೨] \dots\dots ೨೮* \\
 &\equiv ೨೪ಯ^೨ + ೨ಓಯ - ೧೬ಯ - ೧೮ \dots\dots ೨೮ \\
 &\equiv ೨೪ಯ^೨ + ೧೧ಯ - ೧೮ \dots\dots ೩
 \end{aligned}$$

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಯಾವ ಹಂತಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೋಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅವೇ ಹಂತಗಳಿಂದ, ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ ನಮಗೆ ಗುಣಾಕಾರ-ರಾಶಿಯ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾಗುವದು. ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ೨೮ ಮತ್ತು ೨೮ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾದ ಯಾವದಾದರೂ ಸಂಗತಿಯು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುವದೇ? ಈ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಕಡೆಗೆ - ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯದ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಕಡೆಗೆ - ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡಿರಿ, ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ (ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಯದ ಸಹಗುಣಕ) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ, ಇವುಗಳತ್ತ ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡಿರಿ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವು ಕಂಡುಬರುವದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ವಿಚಾರಕ್ಕೆ ಗತಿ ದೊರೆಯಬೇಕೆಂದು ಮತ್ತೊಂದು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ. ಇನ್ನು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಯ+ಕ ಮತ್ತು ಇಯ+ಗ ಈ ದ್ವಿಪದಿ-

* ಕ್ರ.೨೮ ಈ ಹಂತಗಳು ಅನವಶ್ಯಕವಾದವುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅದರಿಂದ ಬೇಕೆಂತಲೇ ಅವುಗಳನ್ನು ಚೌಕ ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಿಂದೆ ಇಂಥ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಹಂತವನ್ನು ನಾವೆಂದಿಗೂ ಬರೆದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಬರೆಯುವದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಉದ್ದೇಶವಿದೆ.

ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿಚಾರ-
ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಸಮಾವೇಶವಾಗುವದು.

$$\begin{aligned} (ಅಯ+ಕೆ)(ಇಯ+ಗ) &\equiv ಇಯ(ಅಯ+ಕೆ)+ಗ(ಅಯ+ಕೆ) \dots\dots ೧ \\ &\equiv ಅಇಯ+ಇಕಯ+ಅಗಯ+ಕಗ \dots\dots ೨ \\ &\equiv ಅಇಯ+(ಇಕ+ಅಗ)ಯ+ಕಗ \dots\dots ೩ \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿಯೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕ್ರ.೨ ಈ ಹಂತದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಪದ-
ಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವಾ. ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು, (ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಯ ದ
ಸಹಗುಣಕಗಳು), ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ (ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಯ ದ
ಸಹಗುಣಕವು) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದಾದರೂ
ಸಂಬಂಧವಿದ್ದುದು ತೋರಿಬರುವದೇ? ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾ-
ಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಎಷ್ಟು ಇರುವದು? **ಅಇಕಗಯ**. ಮತ್ತು
ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ
ಅದು ಎಷ್ಟಿರುವದು? **ಅಇಕಗಯ**. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯು ಮೊದಲಿನ
ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ : ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ. ಮೊದಲನೆಯ
ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ.

$$\begin{aligned} ೧ನೆಯ. ೪.೨ಯ \times ೫.೨ಯ &= ೨೦ಯ \quad ೪.೨ಯ \times ೫.೨= ೨೦ಯ \\ ೨ನೆಯ. ೩.೨ಯ \times (-೨.೫ಯ) &= ೨೦ಯ \quad ೩.೫ಯ \times ೨.೨= ೨೦ಯ \\ ೩ನೆಯ. ೬.೩ಯ \times (-೧೧.೨ಯ) &= -೧೩೮೬ಯ \\ & \quad ೬.೨ಯ \times (-೧೧.೩) = -೧೩೮೬ಯ \end{aligned}$$

$$೪ನೆಯ. -೮.೨ಯ \times ೯.೩ಯ = -೪೩೨ಯ; ೮.೩ಯ \times (-೯.೨) = -೪೩೨ಯ$$

ಮೇಲೆ ನಾವು ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ (ಅಥವಾ ಯ ದ ಸಹಗುಣಕ-
ಗಳ) ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ (ಅಥವಾ ಯ ದ ಸಹಗುಣಕ)
ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವು ಸರಿ ಇರುವವೆಂದು
ಸೂಚಿಸಿದ ಸಂಗತಿಯು ಸತ್ಯತೆಯು ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವ-
ದಿಲ್ಲವೇ? ಇನ್ನು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಗುಣಸೃಷ್ಟಿಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದ-
ಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಗುಣಾ-
ಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ ನಾವು ಹೋಗಬೇಕಾದ ಹಂತಗಳ ಮೇಲಿಂದ, ಅದೇ
ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ, ನಾವು ಗುಣಾಕಾರ ರಾಶಿಯ ಗುಣಸೃಷ್ಟಿಕೃರಣವನ್ನು

ಮಾಡುವಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾಗುವದು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಿಚ್ಚಳವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಅಇಯಃ + (ಇಕ + ಅಗ)ಯ + ಕಗ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣವನ್ನು ನಮಗೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳಿಂದ ಹೋಗಬೇಕಾಗುವದು.

$$\begin{aligned} \text{ಅಇಯಃ} + (\text{ಇಕ} + \text{ಅಗ})\text{ಯ} + \text{ಕಗ} &\equiv \text{ಅಇಯಃ} + \text{ಇಕಯ} + \text{ಅಗಯ} + \text{ಕಗ} \\ &\equiv \text{ಇಯ}(\text{ಅಯ} + \text{ಕ}) + \text{ಗ}(\text{ಅಯ} + \text{ಕ}) \\ &\equiv (\text{ಅಯ} + \text{ಕ})(\text{ಇಯ} + \text{ಗ}) \end{aligned}$$

ಇನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ (ಯ ದ) ಸಹ ಗುಣಕವು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ಇಕಯ ಮತ್ತು ಅಗಯ ಎಂದು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ ಗುಂಪು ಮಾಡಿ ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಎರಡೆರಡು ಪದಗಳ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಯದ ಸಹಗುಣಕವು ವಿಭಾಗಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ತರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಂಥ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬಂದಿರುವ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ಪಯಃ + ಬಯ + ಮ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದದ (ಬಯದ) ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕು. ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು (ಪಮಯಃ ದಷ್ಟು) ಇದ್ದರೆ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಪದದೊಡನೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕೊನೆಯ ಪದದೊಡನೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ವಿಶೇಷ ಸೃಷ್ಟಿಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಈ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಮತ್ತು ಪೆ. ೭. ೩ ರಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ, ಅಲ್ಲಿಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬರೆಯುವಾ, ಮತ್ತು ಇದೇ ನಿಯಮವು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಉಯಿ + ಒಲಯ + ಒಜ

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಉಯಿ} + \text{ಗಂಯ} + \text{ಒಲಯ} + \text{ಒಜ} & (+\text{ಗಂ})(+\text{ಒಲ}) &= +\text{ಒಲಂ}; \\ &\equiv \text{ಒಯ}(\text{ಒಯ}+\text{ಜ})+\text{ಒ}(\text{ಒಯ}+\text{ಜ}) & (+\text{ಒ})(+\text{ಒಜ}) &= +\text{ಒಲಂ}. \\ &\equiv (\text{ಒಯ}+\text{ಜ})(\text{ಒಯ}+\text{ಒ}). \end{aligned}$$

ಗಜಯಿ - ಒಗಯ + ಗಒ

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಗಜಯಿ} - \text{ಒಜಯ} - \text{ಒಯ} + \text{ಗಒ} & (-\text{ಒಜ})(-\text{ಒ}) &= +\text{ಒಗಂ}; \\ &\equiv \text{ಜಯ}(\text{ಒಯ} - \text{ಒ}) - \text{ಒ}(\text{ಒಯ} - \text{ಒ}) & (+\text{ಗಜ})(+\text{ಗಒ}) &= +\text{ಒಗಂ}. \\ &\equiv (\text{ಒಯ} - \text{ಒ})(\text{ಜಯ} - \text{ಒ}). \end{aligned}$$

ಒಒಯಿ - ಜಒಯ - ಒಒ

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಒಒಯಿ} - \text{ಒಒಯ} + \text{ಗಒಯ} - \text{ಒಒ} & (-\text{ಒಒ})(+\text{ಗಒ}) &= -\text{ಗಒಒಒ}; \\ &\equiv \text{ಒಯ}(\text{ಒಯ} - \text{ಗಂ}) + \text{ಒ}(\text{ಒಯ} - \text{ಗಂ}) & (+\text{ಒಒ})(-\text{ಒಒ}) &= -\text{ಗಒಒಒ}. \\ &\equiv (\text{ಒಯ} - \text{ಗಂ})(\text{ಒಯ} + \text{ಒ}). \end{aligned}$$

ಒಒಯಿ + ಗಂಯ - ಗಒ

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಒಒಯಿ} + \text{ಒಒಯ} - \text{ಗಒಯ} - \text{ಗಒ} & (+\text{ಒಒ})(-\text{ಗಒ}) &= -\text{ಒಒಒಒ}; \\ &\equiv \text{ಒಯ}(\text{ಒಯ} + \text{ಒ}) - \text{ಒ}(\text{ಒಯ} + \text{ಒ}) & (+\text{ಒಒ})(-\text{ಗಒ}) &= -\text{ಒಒಒಒ}. \\ &\equiv (\text{ಒಯ} + \text{ಒ})(ಒಯ - \text{ಒ}). \end{aligned}$$

ಒಯಿ + ಒಒಯ + ಒಂ

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಒಯಿ} + \text{ಗಜಯ} + \text{ಒಯ} + \text{ಒಂ} & (+\text{ಗಜ})(+\text{ಒ}) &= +\text{ಗಒಂ}; \\ &\equiv \text{ಒಯ}(\text{ಒಯ}+\text{ಜ})+\text{ಒ}(\text{ಒಯ}+\text{ಜ}) & (+\text{ಒ})(+\text{ಒಂ}) &= +\text{ಗಒಂ}. \\ &\equiv (\text{ಒಯ}+\text{ಜ})(ಒಯ+\text{ಒ}). \end{aligned}$$

ಒಒಯಿ - ಒಗಯ + ಒಜ

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಒಒಯಿ} - \text{ಒಂಯ} - \text{ಒಗಯ} + \text{ಒಜ} & (-\text{ಒಂ})(-\text{ಒಗ}) &= +\text{ಒಒಂ}; \\ &\equiv \text{ಒಯ}(\text{ಒಯ} - \text{ಜ}) - \text{ಒ}(\text{ಒಯ} - \text{ಜ}) & (+\text{ಒಒ})(+\text{ಒಜ}) &= +\text{ಒಒಂ}. \\ &\equiv (\text{ಒಯ} - \text{ಜ})(ಒಯ - \text{ಒ}). \end{aligned}$$

ಗಒಯಿ + ಜಒಯ - ಒಒ

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಗಒಯಿ} - \text{ಒಯ} + \text{ಒಒಯ} - \text{ಒಒ} & (-\text{ಒ})(+\text{ಒಒ}) &= -\text{ಒಒಒಒ}; \\ &\equiv \text{ಒಯ}(\text{ಒಯ} - \text{ಒ}) + \text{ಒ}(\text{ಒಯ} - \text{ಒ}) & (+\text{ಗಒ})(-\text{ಒಒ}) &= -\text{ಒಒಒಒ}; \\ &\equiv (\text{ಒಯ} - \text{ಒ})(ಒಯ + \text{ಒ}). \end{aligned}$$

೧೦ಯ^೨ - ೧೧ಯ - ೫ .

$$\begin{aligned} &\equiv ೧೦ಯ^೨ - ೧೫ಯ + ೪ಯ - ೫ & (-೧೫)(+೪) = -೬೦; \\ &\equiv ೩ಯ(೪ಯ - ೫) + (೪ಯ - ೫) & (+೧೦)(-೫) = -೬೦. \\ &\equiv (೪ಯ - ೫)(೩ಯ + ೧). \end{aligned}$$

೭.೯. ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಎಂಟೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದು ಪ. ೭.೮ ಮತ್ತು ೭.೩. ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಬೇರೆ ಯಾವದಾದರೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುವಂಥ ನಡುವಿನ ಪದದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದೇ? ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ. ೭.೬ ರಲ್ಲಿಯ ೧೦ಯ^೨ + ೧೧ಯ - ೬ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನೇ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ೧೦ ಮತ್ತು -೬ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು - ೬೦. ಇನ್ನು ಯಾವ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು - ೬೦ ಆಗುವದೋ ಅಂಥ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ೧೧ರಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದೇ? ಗುಣಾಕಾರವು - ೬೦ ಇರಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಭಾಗವು ಧನ ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗವು ಋಣ ಇದ್ದಿರಬೇಕು, ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಿಜವಿದೆ. ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವದೇನೆಂದರೆ ನಮ್ಮದುರಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಹೀಗೆ: ಗುಣಾಕಾರವು - ೬೦ ಮತ್ತು ಬೇರೀಜು + ೧೧ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವವು? ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ +೧೫ ಮತ್ತು -೪ ಇವೇ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ +೧೫ಯ ಮತ್ತು -೪ಯ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ನಾವು ಮಾಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ.

ಇಷ್ಟು ತಿಳಿದ ತರುವಾಯ ಇನ್ನು ನಾವು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವಾ.

$$\begin{aligned} ೧೦ಯ^೨ + ೧೧ಯ - ೬ &\equiv ೧೦ಯ^೨ + ೧೫ಯ - ೪ಯ - ೬ \\ &\equiv ೫ಯ(೨ಯ + ೩) - ೨(೨ಯ + ೩) \\ &\equiv (೨ಯ + ೩)(೫ಯ - ೨). \end{aligned}$$

ಪ. ೭.೬ ರಲ್ಲಿ ಇವೇ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನಾವು ಸಂಭವನೀಯವಾದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ (ಅವು ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬು-

ದನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ—ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ನಾವು ಪರೀಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುವಾ) ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿದಿರುವೆವು. ಆ ಪದ್ಧತಿಗಿಂತ ಈಗಿನ ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೂ ಅನುಕೂಲವೂ ಇಲ್ಲವೇ?

ಪ. ೭.೪ ಮತ್ತು ೭.೫ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ೨ಯ^೨ + ೧೧ಯ + ೫ ಮತ್ತು ೬ಯ^೨ - ೧೧ಯ + ೩ ಈ ರಾಶಿಗಳಿಗೂ ನಾವು ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಹಚ್ಚಿ ನೋಡುವಾ. ೨ಯ^೨ + ೧೧ಯ + ೫.೨ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೦.೧೧ ರಲ್ಲಿ ೧೦ ಮತ್ತು ೧ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ ೧೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} ೨ಯ^೨ + ೧೧ಯ + ೫ &\equiv ೨ಯ^೨ + ೧೦ಯ + ಯ + ೫ \\ &\equiv ೨ಯ(ಯ + ೫) + (ಯ + ೫) \\ &\equiv (ಯ + ೫)(೨ಯ + ೧). \end{aligned}$$

೬ಯ^೨ - ೧೧ಯ + ೩. ೬ ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೮. - ೧೧ ರಲ್ಲಿ -೯ ಮತ್ತು -೨ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು + ೧೮ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} ೬ಯ^೨ - ೧೧ಯ + ೩ &\equiv ೬ಯ^೨ - ೯ಯ - ೨ಯ + ೩ \\ &\equiv ೩ಯ(೨ಯ - ೩) - (೨ಯ - ೩) \\ &\equiv (೨ಯ - ೩)(೩ಯ - ೧). \end{aligned}$$

೭.೧೦. ಇನ್ನು ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗಿನ ವಿವೇಚನೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧವು ಬಂದಿರ-
ದಂಥ ಕೆಲವು ಹೊಸ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಈ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ
ಅವುಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಉ. ೧. ೧೫ಯ^೨ + ೩೧ಯ + ೧೦. ೧೫ ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳ
ಗುಣಾಕಾರವು ೧೫೦. ೩೧ ರಲ್ಲಿ ೨೫ ಮತ್ತು ೬ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು
ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ ೧೫೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} ೧೫ಯ^೨ + ೩೧ಯ + ೧೦ &\equiv ೧೫ಯ^೨ + ೨೫ಯ + ೬ಯ + ೧೦ \\ &\equiv ೫ಯ(೩ಯ + ೫) + ೨(೩ಯ + ೫) \\ &\equiv (೩ಯ + ೫)(೫ಯ + ೨). \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ೩೨ರ^೨ - ೪೪ರ + ೧೫. + ೩೨ ಮತ್ತು + ೧೫ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು + ೪೮೦. - ೪೪ ರಲ್ಲಿ - ೨೪ ಮತ್ತು - ೨೦ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ + ೪೮೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} ೩೨ರ^೨ - ೪೪ರ + ೧೫ &\equiv ೩೨ರ^೨ - ೨೪ರ - ೨೦ರ + ೧೫ \\ &\equiv ೮ರ (೪ರ - ೩) - ೫ (೪ರ - ೩) \\ &\equiv (೪ರ - ೩) (೮ರ - ೫). \end{aligned}$$

ಉ. ೩. ೧೮ವ^೨ + ೪೧ವ - ೧೦. ೧೮ ಮತ್ತು - ೧೦ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು - ೧೮೦. + ೪೧ ರಲ್ಲಿ + ೪೫ ಮತ್ತು - ೪ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ - ೧೮೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} ೧೮ವ^೨ + ೪೧ವ - ೧೦ &\equiv ೧೮ವ^೨ + ೪೫ವ - ೪ವ - ೧೦ \\ &\equiv ೯ವ(೨ವ + ೫) - ೨(೨ವ + ೫) \\ &\equiv (೨ವ + ೫) (೯ವ - ೨). \end{aligned}$$

ಉ. ೪. ೨೪ಕ್ಷ^೨ - ೨ಕ್ಷ - ೧೫. ೨೪ ಮತ್ತು - ೧೫ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು - ೩೬೦. - ೨ರಲ್ಲಿ - ೨೦ ಮತ್ತು + ೧೮ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ - ೩೬೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} ೨೪ಕ್ಷ^೨ - ೨ಕ್ಷ - ೧೫ &\equiv ೨೪ಕ್ಷ^೨ - ೨೦ಕ್ಷ + ೧೮ಕ್ಷ - ೧೫ \\ &\equiv ೪ಕ್ಷ(೬ಕ್ಷ - ೫) + ೩(೬ಕ್ಷ - ೫) \\ &\equiv (೬ಕ್ಷ - ೫) (೪ಕ್ಷ + ೩). \end{aligned}$$

೭.೧೧. ಉ. ೫. ೩೫ಯ^೨ + ೭೬ಯ + ೩೩. ೩೫ ಮತ್ತು ೩೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫. ಇನ್ನು ನಮ್ಮೆದುರಿಗೆ ಬರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೆಂದರೆ ೭೬ರಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫ ಆಗುವಂಥ ಯಾವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿರುವವು? ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿ, ಬೇರೀಜು ೭೬ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫ ಆಗುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವವು? ತೇಳೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೇ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ನಾವು ಉತ್ತರ ಕೊಡಬಲ್ಲವಾದರೆ ಖಳೆಯದು, ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಮುಂದಿನ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುವದು ಬೋಗ್ಯವಾಗುವದು.

ಯ^೨ ದ ಸಹಗುಣಕವಾದ ಖಜರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಅವು ಯಾವವು? ೧ ಮತ್ತು ಖಜ, ಇಲ್ಲವೆ ಖ ಮತ್ತು ೭. ಕೊನೆಯ ಪದವಾದ ಖಜರಲ್ಲಿ ಹೀಗೆಯೇ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಅವು ಯಾವವು ಇರಬಹುದು? ೧ ಮತ್ತು ಖಖ, ಇಲ್ಲವೆ ಖ ಮತ್ತು ೧೧. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು:

ಯ + ೧	ಯ + ಖಖ	ಯ + ಖ	ಯ + ೧೧	ಖಯ + ೧	ಖಯ + ಖಖ	ಖಯ + ಖ	ಖಯ + ೧
×	×	×	×	×	×	×	×
ಖಖಯ + ಖಖ	ಖಖಯ + ೧	ಖಖಯ + ೧೧	ಖಖಯ + ಖ	೭ಯ + ಖಖ	೭ಯ + ೧	೭ಯ + ೧೧	೭ಯ + ಖ

ಇಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದವು ದೊರೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇಲ್ಲಿ ಏಳನೆಯ ಜೋಡಿಯು ಕೂಡುವದು ಎಂಬುದು ಸಹಜವಾಗಿ ಹೊಳೆಯುವದು. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ತರ್ಕಿಸಲು ಬರುವದು. ಯ^೨ ದ ಸಹಗುಣಕದ ಅವಯವಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯನ್ನು ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಅದರ ಕೆಳಗೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಅವಯವಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಮೇಲಿನಂತೆ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಆ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಬೇರೀಜು ಯದ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ ಆ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರಗಳೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಯದ ಸಹಗುಣಕದ ಭಾಗಗಳೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ವಿಶದ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

೧ ಖಖ	೧ ಖಖ	೧ ಖಖ	೧ ಖಖ	ಖ ೭	ಖ ೭	ಖ ೭	ಖ ೭
×	×	×	×	×	×	×	×
೧ ಖಖ	ಖಖ ೧	ಖ ೧೧	೧೧ ಖ	೧ ಖಖ	ಖಖ ೧	ಖ ೧೧	೧೧ ಖ

ಖಖ+ಖಖ ೧+೧೧೧೧ ೧೧+೧೦೧ ೭+೭೭೭ ೧೭+೭೭ ೭+೭೭೧ ೧೧+೭೭=೭೭

ಇಲ್ಲಿ ಏಳನೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸರಿಬರುವದು. ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ

ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ೨೧ಯ ಮತ್ತು ೫೫ಯ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುವದು.

$$\begin{aligned} ೨೫ಯ^೨ + ೨೧ಯ + ೫೫ಯ + ೨೨ &\equiv ೭ಯ(೫ಯ + ೨) + ೧೧(೫ಯ + ೨) \\ &\equiv (೫ಯ + ೨)(೭ಯ + ೧೧). \end{aligned}$$

ಕೊನೆಯ ಪದದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು - ಇದ್ದರೆ (ಯ^೨ ದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು - ಚಿನ್ಹವಲ್ಲ - ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಗೃಹೀತವೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.) ಅಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಯದ ಸಹಗುಣಕದಷ್ಟು ಇರುವದೋ ಅದು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಜೋಡಿ ಇರುವದು.

ಉ. ೭. ೧೫ಯ^೨ + ೪ಯ - ೯೧ ಈ ರಾಶಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡುವಾ. ೧೫ರ ಅವಯವಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೧೫ ಇಲ್ಲವೆ ೨ ಮತ್ತು ೫. ೯೧ರ ಅವಯವಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೯೧ ಇಲ್ಲವೆ ೭ ಮತ್ತು ೧೩. ಇನ್ನು ೧೫ರ ಅವಯವಗಳ ಯಾವದೇ ಜೋಡಿಯೊಡನೆ ೯೧ರ ಅವಯವಗಳ ಯಾವದೇ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ.

೧ ೧೫	೧ ೧೫	೧ ೧೫	೧ ೧೫	೨ ೫	೨ ೫	೨ ೫	೨ ೫
X	X	X	X	X	X	X	X
೧ ೯೧	೯೧ ೧	೭ ೧೩	೧೩ ೭	೧ ೯೧	೯೧ ೧	೭ ೧೩	೧೩ ೭

೯೧-೧೫ ೧೩೭೫-೧೧೦೫-೧೩ ೧೯೫-೭ ೨೭೨-೫ ೪೫೫-೨ ೨೯-೨೫=೪

ಇಲ್ಲಿ ಎಳನೇ ಗುಣಾಕಾರವು ಸರಿಹೋಗುವದು ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ೪ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ೨೯ಯ - ೨೫ಯ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕೆಂಬುದು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುವದು.

$$\begin{aligned} ೧೫ಯ^೨ + ೪ಯ - ೯೧ &\equiv ೧೫ಯ^೨ + ೨೯ಯ - ೨೫ಯ - ೯೧ \\ &\equiv ೨ಯ(೫ಯ + ೧೩) - ೭(೫ಯ + ೧೩) \\ &\equiv (೫ಯ + ೧೩)(೨ಯ - ೭). \end{aligned}$$

೭.೧೨. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ **ಉ. ೫** ರಲ್ಲಿಯ ೨೫ಯ^೨ + ೭೭ಯ + ೨೨ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲವಿರುವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ-
ದಕ್ಕಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ, ಬೇರೀಜು ೭೭ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು ೩೫ × ೩೩
ಅಂದರೆ ೧೧೫೫ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ
ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ೧೧೫೫ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ-
ಅವಯವಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾ. ೧೧೫೫ = ೩. ೫. ೭. ೧೧. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ
ಮೊದಲಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅವಯವವು ೧೧ ಇದೆ. ಇನ್ನು ನಾವು
ಎರಡೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವಾ. ಅವುಗಳ ಗುಣಾ-
ಕಾರವು ೧೧೫೫ ಇರಬೇಕು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು
೧, ೧೧ ಇಲ್ಲವೆ ೧೧ರ ಪಟ್ಟು ಇದ್ದು ಅದು ೧೧೫೫ನ್ನು ಭಾಗಿಸಬೇಕು.
ಇಂಥ ಜೋಡಿಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವವು:—

೧ ೧೧೫೫

೧೧ ೧೦೫

೩೩ ೩೫

೫೫ ೨೧ ಬೇರೀಜು ೭೭. ಆದ್ದರಿಂದ ೫೫ ಮತ್ತು ೨೧ ಇವು

ಆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಉ. ೭ ರಲ್ಲಿಯ ಗುಣಯ^೨ + ಲಯ - ೯೧ ಈ ರಾಶಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ
ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಹಿಂದೆ
- ಚಿಹ್ನೆಯಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು
ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ ಅಂತರವು ೪ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು ೧೫ × ೯೧
ಅಂದರೆ ೧೩೫೫ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯ-
ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ೧೩೫೫ = ೩. ೫. ೭. ೧೩. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲ
ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅವಯವವು ೧೩ ಇರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು ಗುಣಾಕಾರವು ೧೩೫೫
ಇದ್ದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧, ೧೩ ಇಲ್ಲವೇ ೧೩ರ ಪಟ್ಟು ಇದ್ದು ೧೩೫೫ನ್ನು
ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಎರಡೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವಾ.

೧ ೧೩೫೫

೧೩ ೧೦೫

೩೯ ೩೫ ಅಂತರವು ೪. ಆದ್ದರಿಂದ ೩೯ ಮತ್ತು ೩೫ ಇವು

ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

೭.೧೩. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಹಾಗೆಯೇ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯುವ ಒಂದು ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗವಿದೆ. ಅದು ಹೀಗೆ: ಬೇರೀಜು ಅಷ್ಟೇ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಮುಂಡಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಗುಣಾಕಾರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋಗುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಬೇರೀಜು ೧೨ ಇರುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದು-ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$$೬ \times ೬ = ೩೬$$

$$೫ \times ೭ = ೩೫$$

$$೪ \times ೮ = ೩೨$$

$$೩ \times ೯ = ೨೭$$

$$೨ \times ೧೦ = ೨೦$$

$$೧ \times ೧೧ = ೧೧$$

ಇಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು ೧೨ ಇರುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ ಗುಣಾಕಾರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಿರುವಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವದು, ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು.

ಇನ್ನು ವಿಷಮ ಬೇರೀಜು ಇರುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತಿಳಿದು-ಕೊಳ್ಳುವಾ. ಬೇರೀಜು ೯ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$$೪ \times ೫ = ೨೦$$

$$೩ \times ೬ = ೧೮$$

$$೨ \times ೭ = ೧೪$$

$$೧ \times ೮ = ೮$$

ಇಲ್ಲಿಯೂ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ಸಂಗತಿಯೇ ಕಂಡುಬರುವದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ, ಅಂದರೆ ೧ ಇದ್ದಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಮ್ಮೆದುರಿನಲ್ಲಿ ಎರಡೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ನಮಗೆ ಈ ಸಂಗತಿಯು ನಿಜವಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹಾಗೆ ನಾವು ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಯಾವದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಅದು ಗ್ರಾಹ್ಯವೆಂದು ತಿಳಿಯಕೂಡದು.

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಸಂಗತಿಯು ನಿಜವಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು

ದನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು. ಮೊದಲು ನಾವು ಸಮ ಬೇರೀಜಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨೮ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವವು.

ಅ × ಅ	= ಅ ^೨	ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಏನು ಕಂಡುಬರುವದು? ಎರಡೂ
(ಅ-೧)(ಅ+೧)	= ಅ ^೨ -೧	ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನ (ಅ ಮತ್ತು ಅ) ಇದ್ದಾಗ
(ಅ-೨)(ಅ+೨)	= ಅ ^೨ -೪	ಗುಣಾಕಾರವು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಂದರೆ ಅ ^೨
(ಅ-೩)(ಅ+೩)	= ಅ ^೨ -೯	ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು
....	ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅದು

ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು.

ಇನ್ನು ವಿಷಮ ಬೇರೀಜು ಇರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨೮ + ೧ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವವು.

ಅ (ಅ+೧)	= ಅ ^೨ +ಅ	ಇಲ್ಲಿಯೂ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ
(ಅ-೧)(ಅ+೨)	= ಅ ^೨ +ಅ-೨	ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ
(ಅ-೨)(ಅ+೩)	= ಅ ^೨ +ಅ-೬	ಅಂತರವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆಯೆಂದರೆ ಬರೇ
(ಅ-೩)(ಅ+೪)	= ಅ ^೨ +ಅ-೧೨	೧ ಇದ್ದಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ
....	ದೊಡ್ಡದು ಅಂದರೆ ಅ ^೨ +ಅ ಇರು

ವದು. ಮತ್ತು ಅಂತರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಹೋದಂತೆಲ್ಲ ಅದು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು.

ಇದರ ಉಪಯೋಗವು ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಇವೆರಡನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವದೋ ಅಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಗೆ ಆಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವಿನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನಾವು ಐದನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇರೀಜು ೭೬ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು

೧೧೫೫ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ೪೦ ಮತ್ತು ೩೬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೪೪೦ ಬರುವದು, ೫೦ ಮತ್ತು ೨೬ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ೧೩೦೦ ಬರುವದು, ೬೦ ಮತ್ತು ೧೬ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ೯೬೦ ಬರುವದು. ೫೬ ಮತ್ತು ೨೦ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೨೦ ಬರುವದು. (ಈ ಎಲ್ಲ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.) ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫ ಇದೆ. ಅದರ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯು ೫ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ೫೫ ಮತ್ತು ೨೧ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವದು ಬಹಳ ಸಂಭವನೀಯವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವೇ ಇರುವವೆಂಬುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ ನಾವು ಆರನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು +೪ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು -೧೩೬೫ ಇದೆ. ಗುಣಾಕಾರವು ಋಣವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಧನ ಇನ್ನೊಂದು ಋಣ ಇರುವದೆಂಬುದು ನಿಚ್ಚಳವಿದೆ. +೩೪ ಮತ್ತು -೩೦ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಗುಣಾಕಾರವು -೧೦೨೦ ಬರುವದು. +೪೪ ಮತ್ತು -೪೦ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ -೧೭೬೦ ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು -೧೩೬೫ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು +೩೪ ಮತ್ತು +೪೪, ಮತ್ತು -೩೦ ಮತ್ತು -೪೦ ಇವುಗಳ ಹತ್ತರ ಹತ್ತರ ನಟ್ಟನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಗುಣಾಕಾರದ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯು ೫ ಇದೆ. +೩೯ ಮತ್ತು -೩೫ ಇವು ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವವೇ ಎಂದು ನೋಡುವಾ. ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವೇ ಇರುವವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ.

೭.೧೪. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು (ಬ) ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು (ಪಮ) ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವ ಬಹಳ ಹತ್ತರದ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾದ ಒಂದು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಈಗ ಹೇಳುವೆವು. ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದ (ಠಿಬದ) ವರ್ಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು (ಪಮ) ಕಳೆಯಬೇಕು. ಬರುವ

ಶೇಷದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಬೇರೀಜನ ಅರ್ಧದಲ್ಲಿ (೧೨ ಬ ದಲ್ಲಿ) ಕೂಡಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿ ಕಳೆಯಬೇಕು. ಬಂದ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಇವು ಆ ಎರಡು ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಈ ನಿಯಮದ ಉಪಯೋಗವು ನಮಗೆ ಪಯ + ಬಯ + ಮ ದಂಥ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ನಡುವಿನ ಪದವನ್ನು ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಒಡೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಬಹಳ ಒಳ್ಳೆ ರೀತಿಯಿಂದ ಆಗುವದು. ನಾವು ಉಯ + ಓಯ + ೨೧ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಬೇರೀಜು ೬೪ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ೪೮ × ೨೧ ಅಂದರೆ ೧೦೦೮ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜನ ಅರ್ಧವು ೩೨; ಅದರ ವರ್ಗವು ೧೦೨೪. ಅದರೊಳಗಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕಾದ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೦೦೮; ಶೇಷವು ೧೬. ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವು ೪. ೩೨ + ೪ = ೩೬; ೩೨ - ೪ = ೨೮. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ೩೬ ಮತ್ತು ೨೮. ಇನ್ನು ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned} \text{ಉಯ} + \text{ಓಯ} + ೨೧ &\equiv \text{ಉಯ} + ೩೬ಯ + ೨೮ಯ + ೨೧ \\ &\equiv ೧೨ಯ (\text{೪ಯ} + ೩) + ೨ (\text{೪ಯ} + ೩) \\ &\equiv (\text{೪ಯ} + ೩) (೧೨ಯ + ೨). \end{aligned}$$

ಇದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಯ - ೯ಯ - ೧೦ ಈ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವಾ. - ೯ದ ವರ್ಗ ೮೧; ಉಯ ಮತ್ತು - ೧೦ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ - ೪೦೦. ೮೧ ಉಣಾ - ೪೦೦ = ೩೧೯ = (೮೧) - ೯ + ೮೧ = ೧೬; - ೯ - ೮೧ = - ೨೫.

$$\begin{aligned} \text{ಉಯ} - ೯ಯ - ೧೦ &\equiv \text{ಉಯ} + ೧೬ಯ - ೨೫ಯ - ೧೦ \\ &\equiv ೮ಯ (\text{೫ಯ} + ೨) - ೫ (\text{೫ಯ} + ೨) \\ &\equiv (\text{೫ಯ} + ೨) (೮ಯ - ೫). \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೭.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:

೧. ೨ಯ + ೫ಯ + ೩.

೨. ೩ಯ + ೪ಯ + ೧.

೩. ಓರಃ + ಗ೩ರಃ + ಓ.
 ೫. ಓಲಃ - ಜಲಃ + ಗ.
 ೭. ಉಪಃ - ಉಪಃ + ಫ.
 ೯. ಓರಃ - ಓರಃ - ಓ.
 ೧೧. ಜಯಃ + ಫಯಃ - ಓ.
 ೧೩. ಗ೦ದಃ - ಗ೩ದಃ - ಓ.
 ೧೫. ಉರಃ - ಉರಃ + ಫ.
 ೧೭. ಓಯಃ + ಓಯಃ + ಓ೦.
 ೧೯. ಓಬಃ - ಗ೩ಬಃ - ಉ.
 ೨೧. ಓಯಃ + ಓಯಃ - ಓ.
 ೨೩. ಓಯಃ + ಗ೩ಯಃ - ಗ೦.
 ೨೫. ಗ೩ಪಃ + ಉಪಃ + ಗ೩.
 ೨೭. ಓಯಃ - ಓಯಃ + ಓ.
 ೨೯. ಉಯಃ + ಓಯಃ - ಓ೦.
 ೪. ಓಮಃ + ಗ೩ಮಃ + ಜ.
 ೬. ಓರಃ - ಗ೩ರಃ + ಜ.
 ೮. ಓಮಃ - ಓಮಃ + ಉ.
 ೧೦. ಉಪಃ + ಉಪಃ - ಗ.
 ೧೨. ಓಪಃ - ಗ೩ಪಃ - ಓ.
 ೧೪. ಓಕ್ಷಃ - ಗ೩ಕ್ಷಃ + ಓ.
 ೧೬. ಉಪಃ - ಉಪಃ - ಜ.
 ೧೮. ಗ೩ನಃ - ಓನಃ - ಓ.
 ೨೦. ಗ೩ಯಃ + ಉಯಃ + ಗ೩.
 ೨೨. ಉಯಃ + ಗ೩ಯಃ + ಉ೦.
 ೨೪. ಗ೩ಯಃ - ಗ೩ಯಃ + ಫ.
 ೨೬. ಉಮಃ + ಉಮಃ - ಜ.
 ೨೮. ಗ೩ರಃ - ಫಗ೩ರಃ + ಫ.
 ೩೦. ಓರಃ - ಓರಃ + ಗ೩.

೩.

ಯಃ + ಬಯಃ + ಮಃ

೭. ಗ೩. ಯಃ + ಬಯಃ + ಮಃ ಇದು ಪಯಃ + ಬಯಃ + ಮಃ ದ ಪ = ಗ ಇರುವಂಥ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಕಾರವಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಅವಯವ-ಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ ಬೇರೀಜು ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ (ಯ ದ) ಸಹಗುಣಕದಷ್ಟು (ಬ) ಇರುವ, ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ಮೊದಲಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ (ಯಃ ದ) ಸಹಗುಣಕ (೧) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ (ಮಃ) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು (ಅಂದರೆ ಮಃ), ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅವಯವಗಳು (ಯ....)(ಯ....) ಈ ಸ್ವರೂಪದವು ಇರುವವು. ಮತ್ತು ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಯಃ + ಉಯಃ + ಗ೩

ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ (ಯ+೩)(ಯ+೫) ಇವು ಆ ಗುಣಕ-
ಗಳೆಂದು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ
ಬೇರೇಜು ೮ ಇದೆ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ೧೫ ಇದೆ. ಅವಯವಗಳನ್ನು
ತೆಗೆದು ತೋರಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$ಯ^೨ - ೧೦ಯ + ೨೪ \equiv (ಯ - ೪)(ಯ - ೬). \quad (-೪) + (-೬) = - ೧೦ ;$$

$$(-೪)(-೬) = + ೨೪.$$

$$ರ^೨ + ೫ರ - ೧೪ \equiv (ರ + ೭)(ರ - ೨). \quad (+೭) + (- ೨) = + ೫ ;$$

$$(+೭)(-೨) = - ೧೪.$$

$$ವ^೨ - ೪ವ - ೨೧ \equiv (ವ - ೭)(ವ + ೩). \quad (- ೭) + (+ ೩) = - ೪ ;$$

$$(-೭)(+೩) = - ೨೧.$$

ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದವು ಧನವಿದ್ದರೆ ಅವಯವಗಳಲ್ಲಿಯ
ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ಏಕಚಿಹ್ನೆವಿರುವವು ಮತ್ತು ನಡುವಿನ ಪದದ ಚಿಹ್ನೆಯೇ
ಅವುಗಳ ಚಿಹ್ನೆವಿರುತ್ತದೆ. ಮೂಲರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದವು ಋಣ-
ವಿದ್ದರೆ ಅವಯವಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ಭಿನ್ನಚಿಹ್ನೆವಿರುವವು.

ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ತರದ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ
ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಹಾಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.
ಯಾವದಾದರೊಂದನ್ನು ಹಾಗೆ ಬಿಡಿಸಲು ಬರದಿದ್ದರೆ ಹಿಂದೆ ವಿಶದಪಡಿಸಿದ ರೀತಿ-
ಗಳಲ್ಲಿಯ ಅನುಕೂಲವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಉ. ೧. ಯ^೨ + ೨೯ಯ + ೨೦೪. ಬೇರೇಜು ೨೯ ಇದ್ದು ಗುಣಾ-
ಕಾರವು ೨೦೪ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವಾ.
೨೦೪ = ೨.೩.೧೭. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅವಯವವು ೧೭.
೧ × ೨೦೪, ೧೭ × ೧೨, ಹೀಗೆ ೨೦೪ ರ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು
ಮಂಡಿಸಲಾರಂಭಿಸಿದೊಡನೆಯೇ ೧೭ + ೧೨ = ೨೯ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು-
ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$ಯ^೨ + ೨೯ಯ + ೨೦೪ \equiv ಯ^೨ + ೧೨ಯ + ೧೭ಯ + ೨೦೪$$

$$\equiv ಯ(ಯ + ೧೨) + ೧೭(ಯ + ೧೨)$$

$$\equiv (ಯ + ೧೨)(ಯ + ೧೭).$$

ಉ. ೨. ರ^೨ - ೩೪ರ + ೨೬೪. ಬೇರೀಜು ೩೪ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು ೨೬೪ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯುವಾ. ೩೪ ರ ಅರ್ಧ ೧೭, ಅದರ ವರ್ಗವು ೨೮೯. ೨೮೯ - ೨೬೪ = ೨೫, ೨೫ ರ ವರ್ಗ-ಮೂಲವು ೫. ೧೭ + ೫ ಅಂದರೆ ೨೨, ಮತ್ತು ೧೭ - ೫ ಅಂದರೆ ೧೨ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} \text{ರ}^2 - ೩೪\text{ರ} + ೨೬೪ &\equiv \text{ರ}^2 - ೧೨\text{ರ} - ೨೨\text{ರ} + ೨೬೪ \\ &\equiv \text{ರ}(\text{ರ} - ೧೨) - ೨೨(\text{ರ} - ೧೨) \\ &\equiv (\text{ರ} - ೧೨)(\text{ರ} - ೨೨). \end{aligned}$$

ಉ. ೩. ವ^೨ - ೧೨ವ - ೧೦೫೩. ಕೊನೆಯ ಪದದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು -ಇದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಾ-ಕಾರವು ೧೦೫೩ ಇದ್ದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ೧೨ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ೧೦೫೩ = ೩೪ × ೧೩. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಯವವು ೧೩. ೧ × ೧೦೫೩, ೧೩ × ೮೧, ೩೯ × ೨೭ ಹೀಗೆ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದೊಡನೆಯೇ ೩೯ - ೨೭ = ೧೨ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} \text{ವ}^2 - ೧೨\text{ವ} - ೧೦೫೩ &\equiv \text{ವ}^2 + ೨೭\text{ವ} - ೩೯\text{ವ} - ೧೦೫೩ \\ &\equiv \text{ವ}(\text{ವ} + ೨೭) - ೩೯(\text{ವ} + ೨೭) \\ &\equiv (\text{ವ} + ೨೭)(\text{ವ} - ೩೯). \end{aligned}$$

ಉ. ೪. ಅ^೪ಯ^೪ - ೧೨ಅ^೨ಯ^೨ - ೪೫

$$\begin{aligned} &\equiv \text{ಅ}^೪\text{ಯ}^೪ + ೩\text{ಅ}^೨\text{ಯ}^೨ - ೧೫\text{ಅ}^೨\text{ಯ}^೨ - ೪೫ \\ &\equiv \text{ಅ}^೨\text{ಯ}^೨(\text{ಅ}^೨\text{ಯ}^೨ + ೩) - ೧೫(\text{ಅ}^೨\text{ಯ}^೨ + ೩) \\ &\equiv (\text{ಅ}^೨\text{ಯ}^೨ + ೩)(\text{ಅ}^೨\text{ಯ}^೨ - ೧೫). \end{aligned}$$

ಉ. ೫. ಯ^೨ - ೨೦ಯ^೨ - ೫೫೫. ನಡುವಿನ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವು -೨೦. ಅದರ ಅರ್ಧ -೧೦. ಅದರ ವರ್ಗ ೧೦೦. ೧೦೦ - (೫೫೫) = ೬೫೫. ಇದರ ವರ್ಗ ಮೂಲವು ೨೫. - ೧೦ + ೨೫ = ೧೫; - ೧೦ - ೨೫ = - ೩೫. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned}
 \text{ಯಿ-೨೦ಯಕ್ಷ-೫೫ಕ್ಷಿ} &\equiv \text{ಯಿ+೧೫ಯಕ್ಷ-೫೫ಯಕ್ಷ-೫೫ಕ್ಷಿ} \\
 &\equiv \text{ಯ (ಯಿ+೧೫ಯಕ್ಷ) - ೫೫ಯಕ್ಷ (ಯಿ+೧೫ಯಕ್ಷ)} \\
 &\equiv (\text{ಯ} + ೧೫ಯಕ್ಷ) (\text{ಯ} - ೫೫ಯಕ್ಷ)
 \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. ಯಿ+೨ಯಿ+೧೦. ೨. ರಿ+೧೪ರ+೪೫. ೩. ಪಿ+೧೩ವ+೪೦.
೪. ಲಿ+೧೦ಲ+೨೧. ೫. ಸಿ+೧೨ಸ+೩೫. ೬. ಕ್ಷಿ-೭ಕ್ಷಿ+೧೦.
೭. ಮಿ-೮ಮಿ+೧೫. ೮. ನಿ-೧೬ನಿ+೩೯. ೯. ಯಿ-೧೦ಯಿ+೧೬.
೧೦. ಯಿ-೨೦ಯಿ+೨೫. ೧೧. ಯಿ-೫ಯಿ-೨೪. ೧೨. ರಿ-೯ರ+೧೮.
೧೩. ಮಿ-೧೬ಮಿ+೩೯ ೧೪. ನಿ-೩ನಿ-೧೩೦. ೧೫. ಪಿ+೮ಪಿ-೫೬.
೧೬. ಪಿ+೨ವ-೮೦. ೧೭. ಬಿ+೫ಬಿ-೨೪. ೧೮. ರಿ+೧೦ರಿ-೫೬.
೧೯. ರಿ-೯ರ-೧೩೬. ೨೦. ಯಿ-೨೦ಯಿ-೧೫.
೨೧. ನಿ-೮ನಿ-೧೧೦. ೨೨. ತಿ+೨೦ತಿ-೬೯. ೨೩. ದಿ+೨೮ದಿ+೯೬.
೨೪. ಕಿ+೧೭ಕಿ+೫೨. ೨೫. ಅಿ-೨೫ಅಿ+೧೫೬.
೨೬. ಗಿ-೧೯ಗಿ-೯೨. ೨೭. ರಿ-೧೫ರಿ-೨೫೦. ೨೮. ಪಿ-೨೪ವ-೮೧.
೨೯. ಪಿ-೩೦ಪಿ+೨೦೦. ೩೦. ಮಿ+೬ಮಿ-೨೧೬.
೩೧. ರಿ-೬ರಿ-೯೧. ೩೨. ಯಿ+೨ಯಿ-೩೫. ೩೩. ಸಿ+೨೩ಸಿ+೧೩೨.
೩೪. ಯಿ+ಯಿ-೨೭೨. ೩೫. ಯಿ-ಯಿ-೩೮೦. ೩೬. ರಿ-೧೬ರಿ-೭೨೦.
೩೭. ಕ್ಷಿ-೧೧ಕ್ಷಿ+೨೪. ೩೮. ಅಿ-೨೫ಅಿ-೧೫೨೦. ೩೯. ಪಿ-೧೧ಪಿ-೮೦.
೪೦. ಯಿ+೩೦ಯಿ+೧೭೬. ೪೧. ಅಿಯಿ+೧೩ಅಿಯಿ+೪೦.
೪೨. ಕಿಯಿ-೧೧ಕಿಯಿ+೨೮. ೪೩. ಯಿ-೫ಯಿ+೬ಕ್ಷಿ.
೪೪. ಯಿ+೫ಯಿ-೧೪ಕ್ಷಿ. ೪೫. ಪಿ-೩ಪಿ-೧೮ಬಿ.
೪೬. ಯಿ+೫ಬಿಯಿ+೬ಬಿ. ೪೭. ಯಿ-೮ಬಿಯಿ-೪೮ಬಿ.
೪೮. ಅಿಯಿ-೩ಅಿಕಿಯಿ-೧೮ಕಿ.
೪೯. ಪಿಯಿ+ಪಿಮಿಯಿ-೨೦ಮಿ-೨೬.

೪.

೭.೧೬. ಪಯಃ + ಬಯಃ + ಮು ಈ ಸ್ವರೂಪದ ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶದಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೧. } ೧೪ಯಃ + ಯ - ೩೦ &\equiv \text{ಗಣಿ}(೧೯೬ಯಃ + ೧೪ಯ - ೪೨೦) \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ} \{ (೧೪ಯ) + ೧೪ಯ - ೪೨೦ \} \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ}(೨೦ + ೨ - ೪೨೦) \dots ೧೪ಯ ದ \\
 &\quad \text{ಬದಲಾಗಿ ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿ} \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ}(೨ + ೨)(೨ - ೨೦) \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ}(೧೪ಯ + ೨)(೧೪ಯ - ೨) \dots \\
 &\quad \text{ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ೧೪ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ} \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ} \times ೭ (೨ಯ + ೨) \times ೭ (೨ಯ - ೧೦) \\
 &\equiv (೨ಯ + ೨)(೨ಯ - ೧೦).
 \end{aligned}$$

ತ್ರಿಪದಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ರದಂಥ ಪ್ರತಿನಿಧಿ ವರ್ಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಪದಿಯನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಅದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೨. } ೫ಯಃ - ೪೭ಯಃ + ೫೬ &\equiv \text{ಗಣಿ}(೨೫ಯಃ - ೫ \times ೪೭ಯಃ + ೨೮೦) \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ}(೨೦ - ೪೭೨ + ೨೮೦) \dots ೫ಯ ದ \\
 &\quad \text{ಬದಲಾಗಿ ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು} \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ}(೨ - ೪೦)(೨ - ೭) \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ}(೫ಯ - ೪೦)(೫ಯ - ೭) \dots ರ ದ \\
 &\quad \text{ಬದಲಾಗಿ ೫ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ} \\
 &\equiv \text{ಗಣಿ} \times ೫(೫ಯ - ೮)(೫ಯ - ೭) \\
 &\equiv (೫ಯ - ೮)(೫ಯ - ೭).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೩. ಗುಯ}^1 - \text{ಗುಯ} - \text{ಗು} &\equiv \text{ಗಿ}(\text{ಉಯ}^1 - \text{ಗು} \times \text{ಗುಯ} - \text{ಗು}) \\
 &\equiv \text{ಗಿ}(\text{ರ}^1 - \text{ಗುರ} - \text{ಗು}) \dots \text{ಗುಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು} \\
 &\equiv \text{ಗಿ}(\text{ರ} - \text{ಗು})(\text{ರ} + \text{ಗು}) \\
 &\equiv \text{ಗಿ}(\text{ಗುಯ} - \text{ಗು})(\text{ಗುಯ} + \text{ಗು}) \dots \\
 &\text{ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ಗುಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ} \\
 &\equiv \text{ಗಿ} \times \text{೩}(\text{ಗುಯ} - \text{೨}) \times \text{೩}(\text{೨ಯ} + \text{೨}) \\
 &\equiv (\text{ಗುಯ} - \text{೨})(\text{೨ಯ} + \text{೨}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೪. ಅಯ}^1 - \text{೩ಯ} - \text{೩} &\equiv \text{ತಿ}(\text{ಅಯ}^1 - \text{ಅ} \times \text{೩ಯ} - \text{೩}) \\
 &\equiv \text{ತಿ}(\text{ರ}^1 - \text{೩ಯ} - \text{೩}) \dots \text{ಅಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು} \\
 &\equiv \text{ತಿ}(\text{ರ} - \text{೪})(\text{ರ} + \text{ಗು}) \\
 &\equiv \text{ತಿ}(\text{ಅಯ} - \text{೪})(\text{ಅಯ} + \text{ಗು}) \text{ ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅಯ} \\
 &\hspace{15em} \text{ಬರೆಯಲಾಗಿ} \\
 &\equiv \text{ತಿ} \times \text{೨}(\text{೨ಯ} - \text{೨}) \times \text{೩}(\text{೨ಯ} + \text{೨}) \\
 &\equiv (\text{೨ಯ} - \text{೨})(\text{೨ಯ} + \text{೨}).
 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತವನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಅಯ}^1 - \text{೩ಯ} - \text{೩} &\equiv \text{ತಿ}(\text{ಅಯ}^1 - \text{ಅ} \times \text{೩ಯ} - \text{೩}) \\
 &\equiv \text{ತಿ} \{ (\text{ಅಯ})^1 - \text{ಅ} \times \text{ಗು} \times \text{ಅಯ} + (\text{ಗು})^1 - (\text{ಗು})^1 - \text{೩} \} \\
 &\equiv \text{ತಿ} \{ (\text{ಅಯ} - \text{ಗು})^1 - \text{೨೪} - \text{೩} \} \\
 &\equiv \text{ತಿ} \{ (\text{ಅಯ} - \text{ಗು})^1 - \text{ಗು} \} \\
 &\equiv \text{ತಿ} \{ (\text{ಅಯ} - \text{ಗು})^1 - (\text{೩})^1 \} \\
 &\equiv \text{ತಿ}(\text{ಅಯ} - \text{ಗು} - \text{೩})(\text{ಅಯ} - \text{ಗು} + \text{೩}) \\
 &\equiv \text{ತಿ}(\text{ಅಯ} - \text{೪})(\text{ಅಯ} + \text{ಗು}) \\
 &\equiv (\text{೨ಯ} - \text{೨})(\text{೨ಯ} - \text{೨}).
 \end{aligned}$$

ತ್ರಿಪದಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ತರುವಾಯ ಆ ತ್ರಿಪದಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವಂಥ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ತಿಳಿಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 ೨೧ಯ^೨-೩೪ಯ-೩೫ &\equiv ೨೧(ಯ^೨-೨೫೫ಯ-೨೫೫) \\
 &\equiv ೨೧ \{ (ಯ-೨೫೫)^೨-(೨೫೫)^೨-೨೫೫ \} \\
 &\equiv ೨೧ \{ (ಯ-೨೫೫)^೨-೨೫೫ \} \\
 &\equiv ೨೧ \{ (ಯ-೨೫೫)^೨-(೨೫೫)^೨ \} \\
 &\equiv ೨೧(ಯ-೨೫೫-೨೫೫)(ಯ-೨೫೫+೨೫೫) \\
 &\equiv ೨೧(ಯ-೫೦೦)(ಯ+೫೦೦) \\
 &\equiv ೩ \times ೭(ಯ-೭೫)(ಯ+೭೫) \\
 &\equiv (೩ಯ-೭)(೭ಯ+೭೫).
 \end{aligned}$$

ಪ. ೭. ೧೪ ರಲ್ಲಿಯ ಉಪಯ^೨ + ೬೪ಯ + ೨೧ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಮೂರೂ ರೀತಿಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯುವಾ. ಉಪಯ^೨ ವನ್ನು ಒಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೪೪ಯ^೨ ಬರುವದು. ಮತ್ತು ಇದು ೧೨ಯ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned}
 ೪೪ಯ^೨+೬೪ಯ+೨೧ &\equiv ೧೨(೧೪೪ಯ^೨+೧೨೨ಯ+೨೩) \\
 &\equiv ೧೨ \{ (೧೨ಯ)^೨+೧೨೨೨ಯ+೨೩ \} \\
 &\equiv ೧೨(೨೨+೧೨೨೨೩)....೧೨ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ
 &\quad \quad \quad \text{೨ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿ} \\
 &\equiv ೧೨(೨೨೨)(೨೨೨) \\
 &\equiv ೧೨(೧೨೨೨೨)(೧೨೨೨೨)....೨ ದ
 &\quad \quad \quad \text{ಬದಲಾಗಿ ೧೨ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ} \\
 &\equiv ೧೨ \times ೩(೪೨೨೨೨)(೧೨೨೨೨) \\
 &\equiv (೪೨೨೨೨)(೧೨೨೨೨).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ಇಲ್ಲವೆ, \text{ ಉಯ}^{\circ} + \text{ಓಉಯ} + \text{ಊ} &\equiv \frac{1}{2}(\text{ಉಉಯ}^{\circ} + \text{ಊಊಯ} + \text{ಊಊ}) \\
 &\equiv \frac{1}{2} \{ (\text{ಊಯ})^{\circ} + \text{ಉ.ಉ.ಊಯ} + (\text{ಉ})^{\circ} - \text{ಊ} \} \\
 &\equiv \frac{1}{2} \{ (\text{ಊಯ} + \text{ಉ})^{\circ} - \text{ಊ} \} \\
 &\equiv \frac{1}{2}(\text{ಊಯ} + \text{ಉ} + \text{ಊ})(\text{ಊಯ} + \text{ಉ} - \text{ಊ}) \\
 &\equiv \frac{1}{2}(\text{ಊಯ} + \text{ಉ})(\text{ಊಯ} + \text{ಉ}) \\
 &\equiv \frac{1}{2} \times 2 (\text{ಉಯ} + \text{ಊ})(\text{ಊಯ} + \text{ಉ}) \\
 &\equiv (\text{ಉಯ} + \text{ಊ})(\text{ಊಯ} + \text{ಉ}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ಇಲ್ಲವೆ, \text{ ಉಯ}^{\circ} + \text{ಓಉಯ} + \text{ಊ} &\equiv \text{ಉ}(\text{ಯ}^{\circ} + \frac{1}{2}\text{ಯ} + \frac{1}{2}) \\
 &\equiv \text{ಉ} \{ (\text{ಯ} + \frac{1}{2})^{\circ} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \} \\
 &\equiv \text{ಉ} \{ (\text{ಯ} + \frac{1}{2})^{\circ} - \frac{1}{4} \frac{1}{2} \} \\
 &\equiv \text{ಉ} \{ (\text{ಯ} + \frac{1}{2})^{\circ} - \frac{1}{4} \} \\
 &\equiv \text{ಉ} \{ (\text{ಯ} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})(\text{ಯ} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \} \\
 &\equiv \text{ಉ} (\text{ಯ} + \frac{1}{2})(\text{ಯ} + \frac{1}{2}) \\
 &\equiv \text{ಉ} \times \frac{1}{2} \times (\text{ಯ} + \frac{1}{2})(\text{ಯ} + \frac{1}{2}) \\
 &\equiv (\text{ಉಯ} + \frac{1}{2})(\text{ಊಯ} + \frac{1}{2}).
 \end{aligned}$$

ಪಯ^೦ + ಬಯ + ಮ ಈ ತರದ ತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರಲ್ಲಿಯ ಹೇತುವೆಂದರೆ ನಮಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ರೀತಿಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಯಾವದು ಯಾವಾಗ ಸುಲಭವೆನಿಸುವದೋ ಅದನ್ನು ಆಗ ನಮಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರಬೇಕು. ಇದಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಜಿಜ್ಞಾಸೆಯುಳ್ಳ ಅಭ್ಯಾಸಿಗಳೆದುರಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾರಿಗೆ ಯಾವದು ಸೇರುತ್ತದೆಯೋ ಮತ್ತು ಸುಲಭವೆನಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅದನ್ನು ಅವರು ಅರಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಯತ್ನಿಸುವರು. ಇಂಥ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಭಂಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಹಲವರಿಗೆ ಕಠಿಣವೆನಿಸುತ್ತದೆಂದು ಅನುಭವವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯದ ವಿಸ್ತೃತವಾದ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಆ ಗಡಚುತನವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ.

೭.೧೭. ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದಿಗಳು $(\text{ಯ}^{\circ} \pm \text{ಉಯ} + \text{ಊ})$ ಮತ್ತು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ $(\text{ಯ}^{\circ} - \text{ಊ})$ ಇವು **ಪಯ^೦ + ಬಯ + ಮ** ಈ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿಯದೇ ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ರೂಪಗಳಿರುವವೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು.

ಯ^೦+೨ಅಯ^೦+ಅ^೦ ಇದರಲ್ಲಿ ಪ=೧, ಬ=೨ಅ, ಮತ್ತು ಮ=ಅ^೦.
 ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕವು ಅ ಮತ್ತು ಅ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು
 ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದವು ಅ ಮತ್ತು ಅ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ-
 ವಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಯ^೦ - ೨ಅಯ^೦+ಅ^೦ ಇದರಲ್ಲಿ ಪ=೧, ಬ=-೨ಅ,
 ಮತ್ತು ಮ=ಅ^೦. ಇಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕವು -ಅ
 ಮತ್ತು -ಅ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದು ಕೊನೆಯ ಪದವು ಅವುಗಳ
 ಗುಣಾಕಾರವಿರುತ್ತದೆ.

ಯ^೦ - ಅ^೦ ಇದರಲ್ಲಿ ಪ=೧, ಬ=೦, ಮತ್ತು ಮ=-ಅ^೦. ಇಲ್ಲಿ
 ಯ^೦ ದ ಸಹಗುಣಕವು -ಅ ಮತ್ತು +ಅ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದು
 ಕೊನೆಯ ಪದವು -ಅ ಮತ್ತು +ಅ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿರುತ್ತದೆ.

೭.೧೮. - ೧೨ಯ^೦ + ೧೧ಯ^೦ + ೧೫ ಇಲ್ಲವೆ-೮ಯ^೦ + ೩೪ಯ^೦ - ೨೧,
 ಇಂಥ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು
 ಬದಲಿಸಿ ಹಲವು ಸಾರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ೧೨ಯ^೦ - ೧೧ಯ^೦ - ೧೫ ಮತ್ತು
 ೮ಯ^೦ - ೩೪ಯ^೦ + ೨೧ ಹೀಗೆ ಮೊದಲು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು
 ತರುವಾಯ ನಿತ್ಯಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣ ಮಾಡಿ ಕೊನೆಗೆ
 (೪ಯ^೦ + ೩)(೩ಯ^೦ - ೫) ಮತ್ತು (೪ಯ^೦ - ೩)(೨ಯ^೦ - ೭) ಎಂದು ಗುಣಕ-
 ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ತಪ್ಪು. ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ
 ಗುಣಾಕಾರವು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಕೆಳಗೆ
 ಮಂಡಿಸಿದ್ದರ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯವಿತ್ತರೆ ತಪ್ಪು ಎಲ್ಲಿ ಆಗುವದೆಂಬುದು ಕಂಡು
 ಬರುವದು.

-೧೨ಯ^೦+೧೧ಯ^೦+೧೫

-೮ಯ^೦+೩೪ಯ^೦-೨೧

= -(೧೨ಯ^೦ - ೧೧ಯ^೦ - ೧೫)

= -(೮ಯ^೦ - ೩೪ಯ^೦ + ೨೧)

= -(೧೨ಯ^೦ + ೯ಯ^೦ - ೨೦ಯ^೦ - ೧೫)

= -(೮ಯ^೦ - ೬ಯ^೦ - ೨೮ಯ^೦ + ೨೧)

= - { ೩ಯ^೦(೪ಯ^೦+೩)-೫(೪ಯ^೦+೩) }

= - { ೨ಯ^೦(೪ಯ^೦-೩)-೭(೪ಯ^೦-೩) }

= -(೪ಯ^೦ + ೩)(೩ಯ^೦ - ೫)

= -(೪ಯ^೦ - ೩)(೨ಯ^೦ - ೭)

= (೪ಯ^೦ + ೩)(- ೩ಯ^೦ + ೫)

= (೪ಯ^೦ - ೩)(- ೨ಯ^೦ + ೭)

= (೪ಯ^೦ + ೩)(೫ - ೩ಯ^೦).

= (೪ಯ^೦ - ೩)(೭ - ೨ಯ^೦).

ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಚಿನ್ತೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯೇ ಎಲ್ಲಿದೆ?
- ೧೨ಯ^೨ + ೧೧ಯ + ೧೫. ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು ೧೧ ಮತ್ತು ಗುಣಾ-
ಕಾರವು - ೧೮೦ ಇರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯುವಾ.
೨೦ ಮತ್ತು -೯ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೇ
ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} -೧೨ಯ^೨ + ೧೧ಯ + ೧೫ &\equiv -೧೨ಯ^೨ - ೯ಯ + ೨೦ಯ + ೧೫ \\ &\equiv -೩ಯ(೪ಯ + ೩) + ೫(೪ಯ + ೩) \\ &\equiv (೪ಯ + ೩)(೫ - ೩ಯ). \end{aligned}$$

ಹಾಗೆಯೇ, - ೮ಯ^೨ + ೩೪ಯ - ೨೧ ಇದರಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು + ೩೪
ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು + ೧೬೮ ಇರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ಬೇಕಾ-
ಗಿವೆ. ೬ ಮತ್ತು ೨೮ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಸಹಜವಾಗಿ ನಮ್ಮ
ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} - ೮ಯ^೨ + ೩೪ಯ - ೨೧ &\equiv - ೮ಯ^೨ + ೬ಯ + ೨೮ಯ - ೨೧ \\ &\equiv - ೨ಯ(೪ಯ - ೩) + ೭(೪ಯ - ೩) \\ &\equiv (೪ಯ - ೩)(೭ - ೨ಯ). \end{aligned}$$

೭.೧೯. ೧೬ (ಯ + ವ)^೨ + ೧೪ (ಯ + ವ) - ೧೫ ಇಲ್ಲವೆ
೬ (ಲ + ವ)^೨ - (ಲ + ವ)(ರ + ಸ) - ೪೦ (ರ + ಸ)^೨ ದಂಥ ರಾಶಿಗಳ
ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ
ತೋರಿಸಿದೆ.

ಯ + ವ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಬರೆದರೆ,

$$\begin{aligned} ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯು &= ೧೬ಅ^೨ + ೧೪ಅ - ೧೫ \\ &= ೧೬ಅ^೨ + ೨೪ಅ - ೧೦ಅ - ೧೫ \\ &= ೮ಅ(೨ಅ + ೩) - ೫(೨ಅ + ೩) \\ &= (೨ಅ + ೩)(೮ಅ - ೫) \\ &= (೨ಯ + ೨ವ + ೩)(೮ಯ + ೮ವ - ೫)..... \end{aligned}$$

ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಯ + ವ ಬರೆದು

ಲ + ವ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಮತ್ತು ರ + ಸ ದ ಬದಲಾಗಿ ಇ ಬರೆದರೆ,
ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು = ೬ಅ^೨ - ಅಇ - ಛಂಇ^೨

$$= ೬ಅ^೨ + ೧೫ಅಇ - ೧೬ಅಇ - ಛಂಇ^೨$$

$$= ೩ಅ (೨ಅ + ೫ಇ) - ೮ಇ (೨ಅ + ೫ಇ)$$

$$= (೨ಅ + ೫ಇ)(೩ಅ - ೮ಇ)$$

$$= (೨ಲ + ೨ವ + ೫ರ + ೫ಸ)(೩ಲ + ೩ವ - ೮ರ - ೮ಸ)$$

ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಲ + ವ ಮತ್ತು ಇ ದ ಬದಲಾಗಿ ರ + ಸ ಬರೆದು

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

ಗುಣಪೈಥಕ್ಯರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:—

೧. ೧೫ಯ^೨ - ೧೯ಯ - ೧೦.

೨. ೩೨ರ^೨ - ೧೬ರ - ೬.

೩. ೬ವ^೨ - ೩ವ - ೬೩.

೪. ೧೦ಲ^೨ - ೭ಲ - ೩೩.

೫. ೫೬ಸ^೨ - ೬೦ಸ - ೩೬.

೬. ೫೦ಕ್ಷ^೨ + ೫ಕ್ಷ - ೬.

೭. (ಯ + ರ)^೨ + ೨(ಯ + ರ) - ೩೫.

೮. (ಲ + ವ)^೨ - (ಲ + ವ) - ೭೨.

೯. ೨(ರ + ಸ)^೨ + ೧೩(ರ + ಸ) + ೧೫.

೧೦. ೬(ಯ + ಕ್ಷ)^೨ - ೭(ಯ + ಕ್ಷ) - ೨೦.

೧೧. ೧೬(ಯ + ರ)^೨ + ೨(ಯ + ರ)(ಲ + ವ) - ೩(ಲ + ವ)^೨.

೧೨. ೨(ಪ + ಫ)^೨ + ೫(ಪ + ಫ)(ಬ + ಮ) - ೨೫(ಬ + ಮ)^೨.

೧೩. ೬(ಯ + ರ)^೨ - ೧೧(ಯ + ರ)(ರ + ವ) + ೪(ರ + ವ)^೨.

೧೪. ೧೦(ಯ + ವ)^೨ - (ಯ + ವ)(ವ + ಸ) - ೩(ವ + ಸ)^೨.

ಎಂಟನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಮಹತ್ತರ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ

೮.೧. ೬ರ ಗುಣಕಗಳು ೨ ಮತ್ತು ೩; ೧೦ರ ಗುಣಕಗಳು ೨ ಮತ್ತು ೫. ೨ ಇದು ೬ ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವುದು.

೨, ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವು ೩೦ರ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ೨, ೩ ಮತ್ತು ೬ ಇವು ೪೨ರ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವು ೬೦ ಹಾಗೂ ೪೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ೨×೩ ಅಂದರೆ ೬ ಇದಾದರೂ ೩೦ ಮತ್ತು ೪೨ ಇವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವುದು.

೩, ೫ ಮತ್ತು ೬ ಇವು ೧೦೫ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ೩೦, ೪೨ ಮತ್ತು ೧೦೫ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ೩. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ೩ ಇದೇ ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವುದು.

ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವೆಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವೆಂದು ಅದು ಇರುವದೋ ಅವುಗಳಿಗೆ ಅದು ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವುದು. ೫ ರಿಂದ ೨೫ ಮತ್ತು ೩೫ ಇವೆರಡನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ೫ ಇದು ೨೫ ಮತ್ತು ೩೫ ಇವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು. ೨೪ ಮತ್ತು ೩೬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ೨, ೩, ೪, ೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದರಿಂದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೪ ಮತ್ತು ೩೬ ಇವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವುದು. ಈ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ೧೨ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ೧೨ ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು. ಇದಕ್ಕೇ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ದೃಢಭಾಜಕವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣದಿಂದ ದೃಢಭಾಜಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ತಿಳಿಯಲು ಬರುವುದು. ೪೫ ಮತ್ತು ೬೦ ಇವುಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ನಾವು ಮೊದಲು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವೆವು.

೪೫ = ೩ × ೩ × ೫; ೬೦ = ೨ × ೨ × ೩ × ೫. ಇಲ್ಲಿ ೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು, ೫ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ೩ × ೫ ಅಂದರೆ ೧೫ ಇದು ಸಹ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು. ಈಗ ಈ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ೧೫ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಿರುವದು. ಇದಕ್ಕೆ ನಾವು ದೃಢಭಾಜಕವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಆ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು.

೮.೨. ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳದ್ದಾದರೂ ನಮಗೆ ಇದರಂತೆಯೇ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಅಯ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ಇರುವದು. ಅಕಯ ಮತ್ತು ಅಕಕ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಮತ್ತು ಕ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ಅ × ಕ ಎಂದರೆ ಅಕ ಇದಾದರೂ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅದು ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಗುಣಕ ಎಂದರೆ ಯಾವ ರಾಶಿಯದು ಅದು ಗುಣಕವಿರುವದೋ ಆ ರಾಶಿಗೆ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಅದುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ವಿಭಾಜಕ (ಯಾವುದರಿಂದ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅಂದರೆ ಯಾವದು ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವದೋ) ಎಂದು ಸಹ ಸಂಜ್ಞೆ ಇರುವದು. ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವೆಂದರೆ ಅದು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದೋ ಆ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವದು. ಅಂದರೆಯೇ ಅದು ಆ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿರುವದು.

ಉ. ೧. ಪಬಯ, ಪಬನು. ಪ, ಬ, ಮತ್ತು ಪಬ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು. ಪಬ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಉ. ೨. ಪೌಬೌಯ, ಪಬೌರ. ಪ, ಬ, ಬೌ, ಪಬ, ಪಬೌ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು. ಪಬೌ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಉ. ೩. ೨ಪಬೌಮೌಯ, ೪ಪೌಬೌರ, ೬ಪೌಬೌಮನ. ೨, ಪ, ಬ, ಬೌ, ಪಬ, ಪಬೌ, ೨ಪ, ೨ಬ, ೨ಬೌ, ೨ಪಬ, ೨ಪಬೌ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು. ೨ಪಬೌ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ (ವಿಭಾಜಕ-ಗಳಲ್ಲಿ) ಯಾವ ಗುಣಕವು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಿರುವದೋ ಅದಕ್ಕೆ ನಾವು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮಹತ್ ಅಂದರೆ ದೊಡ್ಡದು, ಮತ್ತು ಮಹತ್ತಮ ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ೪, ಪ೪¹ ಮತ್ತು ೨ಪ೪¹ ಇವು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕಗಳಿರುವವು. ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಯನ್ನು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಿಂದ ನಾವು ಬರೆಯುವೆವು.

ಉ. ೩. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಬರೆದಿರುವದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಪ೪ಬ೪ಮ೪, ಪ೪ಬ೪ಮ೪¹, ಪ೪ಬ೪ಮ೪² ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಹೇಳಿರಿ. ಪ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಇವುಗಳ ಘಾತಗಳು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವರ್ಣಗಳ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ. ಮೂರು ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವ ಪದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತ ಪ೪ ಇರುವದು. ಬದ್ದು ಬ೪ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಮದ್ದು ಮ೪ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ೪ಬ೪ಮ೪¹ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮೂರೂ ರಾಶಿಗಳ ಕಡೆಗೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೀತಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ಪ೪, ಬ೪ ಮತ್ತು ಮ೪ ಇವು ಆ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಪ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಇವುಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಘಾತಗಳಿರುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಮತ್ತು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದಿರುವ ಘಾತವೇ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ದೊಡ್ಡ ಘಾತ-ವಿರುವದು.

ಉ. ೨. ಪ೪ಬ೪ಮ೪¹, ಬ೪ಮ೪¹, ಪ೪ಬ೪ಮ೪² ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ ಪ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಮೂರರಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವ ಬದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವು ಬ೪ ಇದ್ದು ಮದ್ದು ಮ೪ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಬ೪ಮ೪¹ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ೩. ೪ಅ೪ಕ೪ಯ೪¹, ೬ಅ೪ಕ೪ಯ೪¹, ೧೨ಅ೪ಕ೪ಯ೪¹ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಹೇಳಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ೪, ೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವು ಅಂಕಗುಣಕ-

ಗಳಿರುವವು. ಅವುಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು (ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು) ೨ ಇರುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಅಂತಿಕೆಯು ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೩೦

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. ೫೮; ೩೮. ೨. ೪೮; ೬೮. ೩. ೮೮; ೧೨.

೪. ೮೮; ೧೨೮. ೫. ೨೪೮೮; ೩೬೮೮. ೬. ೮೮; ೮೮೮.

೭. ೮೮; ೮೮೮. ೮. ೮೮೮; ೮೮೮೮. ೯. ೨೮೮; ೨೮೮.

೧೦. ೪೮೮; ೬೮೮. ೧೧. ೨೮೮; ೧೨೮೮.

೧೨. ೧೮೮೮; ೨೦೮೮. ೧೩. ೨೮೮೮೮; ೩೮೮೮೮.

೧೪. ೧೮೮೮೮; ೮೮೮೮೮; ೧೮೮೮೮೮.

೧೫. ೨೮೮೮೮; ೩೮೮೮೮; ೫೮೮೮೮.

೧೬. ೬೮೮೮೮; ೮೮೮೮೮; ೧೬೮೮೮೮.

೧೭. ೫೮೮೮೮; ೬೮೮೮೮; ೮೮೮೮೮.

೧೮. ೧೬೮೮೮; ೨೪೮೮೮; ೩೬೮೮೮.

೧೯. ೮೮೮೮; ೨೪೮೮೮; ೪೮೮೮೮.

೨೦. ೩೮೮೮೮; ೧೮೮೮೮; ೨೮೮೮೮.

೨೧. ೨೮೮೮೮; ೧೮೮೮೮; ೧೮೮೮೮.

೨೨. ೮೮೮; ೧೮೮; ೧೬೮.

೨೩. ೧೬೮೮೮; ೨೦೮೮೮; ೩೮೮೮೮.

೨೪. ೮೮೮೮೮; ೨೮೮೮೮; ೩೮೮೮೮.

೨೫. ೨೮೮೮; ೩೮೮೮; ೪೮೮೮.

೨೬. ೨೮೮೮; ೬೮೮೮; ೧೬೮೮.

೨೭. ೬೮೮; ೧೮೮೮; ೩೮೮೮.

೨೮. ೪೮೮೮; ೮೮೮೮; ೧೬೮೮.

೨೯. ೧೮೮೮೮; ೨೮೮೮೮; ೧೮೮೮.

೩೦. ೮೮; ೮೮೮; ೮೮೮೮.

೩೧. ೧೮೮೮೮೮; ೩೮೮೮೮೮; ೨೮೮೮೮೮.

೮.೪. ಅಂಕಗಣಿತದೊಳಗಿನ ಗುಣಪೃಥಕ್ರಣದಿಂದ ದೃಢಭಾಜಕ ತೆಗೆಯುವ ರೀತಿ ಮತ್ತು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವ ಈ ರೀತಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ತರದ ಭೇದವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಅಂದರೆ ಮಾತ್ರ ದೃಢಭಾಜಕವಲ್ಲ. ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಖಸಬಿ ಮತ್ತು ಒಪಿಬ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಪಬ ಇದು ಇರುತ್ತದೆ. $ಪ=೨$ ಮತ್ತು $ಬ=೩$ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಖಸಬಿ=೯೦, ಮತ್ತು ಒಪಿಬ=೬೨. ೯೦ ಮತ್ತು ೬೨ ಇವುಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ೧೮. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಪಬ ಇದೆ. ಮತ್ತು ಪಬ=೬. ಇದು ಹೀಗೆ ಆಗಲು ಒಂದು ಕಾರಣವಿದೆ. ಬೈಜಿಕ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಣಯುಕ್ತ ಗುಣಕಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತ ಮತ್ತು ಅಂಕ-ಗುಣಕಗಳ ದೃಢಭಾಜಕ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದದ್ದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅಂಕಿಕ ದೃಢಭಾಜಕವು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಗುಣಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ೩೦೦ ಮತ್ತು ೧೦೦೦ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೩೦೦ ಇರುವದು, ಆದರೆ ೩=೨ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ೩೦೦=೪೮ ಮತ್ತು ೧೦೦೦=೪೦ ಆಗುವದು. ಮತ್ತು ಆಗ ದೃಢಭಾಜಕವು ೮ ಇರುವದು. ಆದರೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಆಗಿರುವ ಅ೦ದ ಬೆಲೆಯು ೪ ಇದೆ. ಇದರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಅದು ಯಾವದೆಂದರೆ, ಅ, ಅ೦, ಅ೨, ಅ೩, ಅ೪....ಈ ಅ ದ ಘಾತಗಳು ಏರುವ ಘಾತ-ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ತೋರಿದರೂ ಅವುಗಳ ಮಾನ (ಬೆಲೆಯು) ಕ್ರಮವಾಗಿ ಏರುತ್ತಲೇ ಹೋಗುವದೆಂದಲ್ಲ. ಅ>೧ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಏರುತ್ತ ಹೋಗುವದು, ಅ=೧ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಸ್ಥಿರವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಅ<೧ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಅ=೨ ಇದ್ದರೆ, ಅ೦=೪, ಅ೨=೮, ಅ೩=೧೬ ೩೦೦ ಮತ್ತು ೪೮೦೦ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೧೬೮. ಆದರೆ ಅ=೨ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ೩೦೦=೧೬ ಮತ್ತು ೪೮೦೦=೧೨. ೧೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವುಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ೪. ಆದರೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಆಗಿರುವ ೧೬೮ ಇದರ ಬೆಲೆಯು ೮. ಅದುದರಿಂದ ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ಮೂಲರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಗೆ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಸರಿ ಇರುವದೆಂದಲ್ಲ. ಇರಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೆ ಇರದಿರಬಹುದು.

೮. ಜಿ. ಈಗ ದ್ವಿಪದ, ತ್ರಿಪದ ಮತ್ತು ಬಹುಪದ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ೪೮೮ + ೬೮ರ ಮತ್ತು ೮೮೮ + ೧೨೮ರ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪೮೮ + ೬೮ರ = ೨೮ (೨೮ + ೩೮),
ಮತ್ತು ೮೮೮ + ೧೨೮ರ = ೪೮ (೨೮ + ೩೮).

∴ ೨(೨೮ + ೩೮) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ೨. ೧೬೮೮ + ೪೦೮ರ, ೨೪೮೮ + ೬೦೮ರ ಮತ್ತು ೬೪೮೮ + ೧೬೦೮ರ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೬೮೮ + ೪೦೮ರ = ೮೮೮ (೨೮ + ೫೮),
೨೪೮೮ + ೬೦೮ರ = ೧೨೮೮ (೨೮ + ೫೮),
ಮತ್ತು ೬೪೮೮ + ೧೬೦೮ರ = ೩೦೮೮ (೨೮ + ೫೮).
∴ ೪೮೮ (೨೮ + ೫೮) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ೩. ೪೮೮೮ + ೮೮೮ - ೧೨೮೮, ೬೮೮೮ + ೧೨೮೮ - ೧೮೮೮ ಮತ್ತು ೮೮೮೮ + ೧೬೮೮ - ೨೪೮೮ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪೮೮೮ + ೮೮೮ - ೧೨೮೮ = ೪೮೮೮ (೮ + ೨೮ - ೩೮),
೬೮೮೮ + ೧೨೮೮ - ೧೮೮೮ = ೬೮೮೮ (೮ + ೨೮ - ೩೮),
೮೮೮೮ + ೧೬೮೮ - ೨೪೮೮ = ೮೮೮೮ (೮ + ೨೮ - ೩೮).
∴ ೮೮೮೮ (೮ + ೨೮ - ೩೮) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ೪೮೮ + ೮೮೮; ೬೮೮ + ೧೨೮.

೨. ೯೮೮ + ೧೨೮; ೫೮೮ + ೮೮೮.

೩. ಲಪ್ಪ - ಲಪಬ + ೧೨ಪಮ; ಲಪಬ - ೨ಬ್ + ೬ಬಮ;
೧೨ಪಮ - ೬ಬಮ + ೧೨ಮ್.

೪. ಲಯ್ಪರಲ + ಲಯ್ಪರಲ - ಲಯ್ಪರಲ; ೨೪ಯ್ಪರಲ - ೧೨ಯ್ಪರಲ
+ ೧೨ ಯ್ಪರಲ; ಫಯ್ಪರಲ - ೨೪ಯ್ಪರಲ - ಫಯ್ಪರಲ.

೫. ಲಪಬ್ + ಲಪಬ - ೨೦ಪ; ೧೨ಕಬ್ + ೧೨ಕಬ - ೬೦ಕ;
೧೬ಪ್ಪಬ್ + ೧೬ಪ್ಪಬ - ೨೦ಪ್.

೬. ಲಪಪ + ಲಪಬ + ಲಪಮ; ಲಕಪ + ಲಕಬ + ಲಕಮ;
೬ಪ + ೬ಬ + ೬ಮ.

೭. ೨೪ಪಪ - ೧೨ಪಮ; ಲಕಪಮ - ೩೬ಕಮ; ೩೬ಪ - ೨೪ಮ.

೮. ೩೦ಪ - ಲಕಕ + ೧೫ಗ; ೫೦ಪ - ೭೫ಕ + ೨೫ಗ; ೨೦ಪ - ೩೦ಕ + ೧೦ಗ.

೯. ಲಯ್ - ಲಯರ; ೧೨ಯ್ - ಲಯ್ಪರ; ೨೪ಗಯ್ - ೧೨ಗಯರ;
೨೦ಕಯ್ - ೧೦ಕಯ್ಪರ.

೧೦. ಲಕಪ್ಪ + ಲಕಪ್ಪ; ೧೨ಕಪ್ಪ + ೧೨ಕಪ್ಪ; ಫಕಪ್ಪ + ಫಕಪ್ಪ;
೧೬ಕಪ್ಪ + ೧೬ಕಪ್ಪ.

೧೧. ೧೬ಪ್ಪಕ - ಲಪಪ್ಪ; ಲಪ್ಪ - ಲಪಕ; ೨೦ಪ್ಪಕ - ೧೦ಪಪ್ಪ;
೩೬ಪಪ್ಪಕ - ೧೬ಪಪ್ಪ.

೧೨. ೧೨ಪ + ೨೪ಬ - ೩೬ಮ; ೧೬ಪ - ಲಬ + ೧೬ಮ; ಲಪಪ - ಲಬ - ೧೯ಮ.

೮.೬. ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಲಯ + ಲರ ಮತ್ತೆ ಯ್ - ರ್ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಲಯ + ಲರ \equiv ಲ(ಯ + ರ)
ಯ್ - ರ್ \equiv (ಯ + ರ)(ಯ - ರ)
 \therefore ಯ + ರ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ೨. ಲಯ್ - ಲವ್ ಮತ್ತೆ ೧೨ಯ್ + ೧೨ವ್ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಲಯ್ - ಲವ್ \equiv ಲ(ಯ್ - ವ್) \equiv ಲ(ಯ + ವ)(ಯ - ವ)

೧೨ಯ್ + ೧೨ವ್ \equiv ೧೨(ಯ್ + ವ್) \equiv ೧೨(ಯ + ವ)(ಯ್ - ಯ + ವ್)

\therefore ೨(ಯ + ವ) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ೩. ಲಯಃ - ಲವಃ ಮತ್ತು ೧೨ಯಃ + ೧೨ಯಃ + ೧೨ವಃ
ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಲಯಃ} - \text{ಲವಃ} &\equiv \text{ಲ}(\text{ಯಃ} - \text{ವಃ}) \\ &\equiv \text{ಲ}(\text{ಯ} - \text{ವ})(\text{ಯ} + \text{ಯವ} + \text{ವ}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೧೨ಯಃ + ೧೨ಯಃ + ೧೨ವಃ &\equiv ೧೨(\text{ಯಃ} + \text{ಯಃ} + \text{ವಃ}) \\ &\equiv ೧೨(\text{ಯ} + \text{ಯವ} + \text{ವ})(\text{ಯ} - \text{ಯವ} + \text{ವ}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ಲ}(\text{ಯ} + \text{ಯವ} + \text{ವ}) \quad \text{ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.}$$

ಉ. ೪. ೧೫ಅಯಃ + ೧೫ಅರಃ + ೧೦ಕಯಃ + ೧೦ಕರಃ ಮತ್ತು
೫೦ಯಃ + ೫೦ಯರಃ + ೨೦ರಃ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} ೧೫ಅಯಃ + ೧೫ಅರಃ + ೧೦ಕಯಃ + ೧೦ಕರಃ &\equiv ೫ಅ(೫ಯಃ + ೫ರಃ) + ೧೦ಕ(೫ಯಃ + ೫ರಃ) \\ &\equiv (೫ಯ + ೫ರ)(೫ಅ + ೧೦ಕ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೫೦ಯಃ + ೫೦ಯರಃ + ೨೦ರಃ &\equiv ೨(೫೦ಯಃ + ೫೦ಯರಃ + ೨೦ರಃ) \\ &\equiv ೨(೫ಯ + ೫ರ) \end{aligned}$$

$$\therefore ೫ಯ + ೫ರ \quad \text{ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.}$$

ಉ. ೫. ೧೦೦ಪಃ - ೫೫ಮಃ, ೧೦೦ಪಃ - ೧೦೦ಪಮಃ + ೫೫ಮಃ ಮತ್ತು
೪೦ಪಃ + ೧೫ಪಮಃ - ೨೫ಮಃ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} ೧೦೦ಪಃ - ೫೫ಮಃ &\equiv ೫(೨೦ಪಃ - ೧೧ಮಃ) \\ &\equiv ೫(೨೦ಪ + ೧೧ಮ)(೨೦ಪ - ೧೧ಮ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೧೦೦ಪಃ - ೧೦೦ಪಮಃ + ೫೫ಮಃ &\equiv ೫(೨೦ಪಃ - ೧೦೦ಪಮಃ + ೧೧ಮಃ) \\ &\equiv ೫(೨೦ಪ - ೧೦೦ಮಃ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೪೦ಪಃ + ೧೫ಪಮಃ - ೨೫ಮಃ &\equiv ೫(೮ಪಃ + ೩ಪಮಃ - ೫ಮಃ) \\ &\equiv ೫(೮ಪಃ + ೩ಪಮಃ - ೫ಪಮಃ - ೫ಮಃ) \\ &\equiv ೫ \{ ೮ಪ(ಪ + ಮ) - ೫ಮ(ಪ + ಮ) \} \\ &\equiv ೫(ಪ + ಮ)(೮ಪ - ೫ಮ) \end{aligned}$$

$$\therefore ೫(೮ಪ - ೫ಮ) \quad \text{ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.}$$

ಉ. ೬. ೬೫ಪಯಃ - ೨೫ಅಪಯರಃ + ೨೫ಅಪರಃ,
೪ಯಃ - ೨೦ಯಃ + ೬೪ರಃ ಮತ್ತು ೨೦ಯಃ - ೨೦ಯಃ + ೧೦೦ರಃ
ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಒಪಪಯ} - \text{ಒಪಪಯರ} + \text{ಒಪಪರ} &\equiv \text{ಒಪಪ(ಯ - ಒಪಪರ + ಒಪರ)} \\ &\equiv \text{ಒಪಪ(ಯ - ರ)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಒಪಪ} - \text{ಒಪಪರ} + \text{ಒಪರ} &\equiv \text{ಒ(ಪ - ಪರ + ರ)} \\ &\equiv \text{ಒ(ಪ - ರ)} \\ &\equiv \text{ಒ(ಪ + ರ)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಒಪ} - \text{ಒಪಪರ} + \text{ಒಪರ} &\equiv \text{ಒ(ಪ - ಪರ + ರ)} \\ &\equiv \text{ಒ(ಪ - ರ)} \\ &\equiv \text{ಒ(ಪ - ರ)} \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಕಗುಣಕಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ೨ ಇದೆ, ಇದಲ್ಲದೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು (ಯ - ರ) ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ೨(ಯ - ರ) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುವದು.

೮.೭. ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ನಮಗೆ ಮೊದಲು ಆ ರಾಶಿಗಳ ಪೂರ್ಣ ಗುಣಪೃಥಕ್ರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕು. ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವ ಈ ರೀತಿಗೆ ಗುಣಕ-ಪದ್ಧತಿ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ದೃಢಭಾಜಕ ತೆಗೆಯುವ ಬೇರೊಂದು ಪದ್ಧತಿಯು ಉಂಟು. ಆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವೆವು. ಉಳಿಯುವ ಶೇಷದಿಂದ ಭಾಜಕವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವೆವು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕ್ರಮಶಃ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ವರೆಗೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ದೃಢಭಾಜಕವು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವದು. ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಬೈಜಿಕ-ರಾಶಿಗಳದ್ದಾದರೂ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ನಮಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಕಠಿಣವೆನಿಸಿದಾಗಷ್ಟೇ ಆ ರೀತಿಯನ್ನು ನಾವು ಅನುಸರಿಸುವೆವು. ಆ ರೀತಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ-ಪದ್ಧತಿ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವುಗಳಿಗಿಂತ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ರಣ

ಮಾಡಲು ಬರುವ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಇವು-
 ಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅವಯವಗಳು ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯಾದರೂ
 ಇರುವವು. ಅದ್ದರಿಂದ ಇದರ ಮೂಲಕ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು
 ತೆಗೆಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವ ಸೂಚನೆಯು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ಯಿ + ೭ಯ + ೧೦; ಯಿ + ೯ಯ + ೨೦.

೨. ಯಿ - ೨ಯ - ೨೪; ಯಿ + ೨ಯ - ೪೮.

೩. ಯಿ + ೩ಯ - ೨೮; ಯಿ - ೨ಯ - ೬೩.

೪. ಯಿ - ೧೦ಯ + ೨೪; ಯಿ - ೧೨ಯ + ೩೨.

೫. ೧೪ಸಿ - ೧೪ಮಿ; ೨೧ಸಿ + ೩೫ಸಮ - ೫೬ಮಿ.

೬. ೧೬ಅಸಿ + ೫೪ಕಸಿ; ೧೨ಅಸಿ + ೩೬ಅಕ + ೨೭ಕಸಿ.

೭. ೮ಅಸಿ - ೮ಕಸಿ; ೬ಅಸಿ - ೧೨ಅಕ + ೬ಕಸಿ; ೪ಅಸಿ - ೪ಕಸಿ.

೮. ೪ಸಿ - ೧೨ಸಮ - ೭ಮಿ; ೮ಸಿ - ೨೨ಸಮ - ೨೧ಮಿ;

೧೦ಸಿ - ೩೯ಸಮ + ೧೪ಮಿ.

೯. ೩ಯಿ - ೧೨ಯರ + ೧೨ರಸಿ; ಯಿ - ೮ಸಸಿ; ೧೨ಯಿ - ೨೦ಯರ - ೮ರಸಿ.

೧೦. ೪ದಳಿ + ೪ದಿನಿ + ೪ನಳಿ; ೮ದಸಿ + ೮ನಸಿ; ೨ದಸಿ - ೪ದಿನಿ + ೪ದನಿ - ೨ನಸಿ.

೧೧. ೨ರಸಿ + ೮ರ - ೬೪; ೮ರಸಿ - ೪ಅರ - ೯೬ಅ; ೪ರಸಿ + ೨೦ರ - ೯೬.

೧೨. ೧೨ಮಿ - ೬೦ವ + ೭೨; ೪ಮಿ - ೨೮ವ + ೪೮; ೮ಮಿ - ೪೮ವ + ೬೪.

೧೩. ೧೬ಯಸಿ - ೧೦೦ಯ; ೪೮ಯಸಿ - ೮೮ಯಸಿ - ೮೦ಯ;

೩೬ಯಸಿ + ೧೧೪ಯಸಿ + ೬೦ಯ.

೧೪. ಯಳಿ - ೮ಳಿ; ಯ೬ - ೮೬; ಯಳಿ + ಯರಸಿ - ೨೮ಳಿ.

೧೫. ಯಳಿ + ೪ಯರಸಿ + ೧೬ರಸಿ; ಯಳಿ + ೮ಯರಸಿ;

ಯಸಿರ - ೨ಯರಸಿ + ೪ಯರಸಿ.

೧೬. ೧೬ಯಳಿ - ೭೨ಯರಸಿ + ೮೧ರಸಿ; ೧೬ಯಳಿ - ೪೮ಯಸಿರ + ೩೬ಯರಸಿ;

(೬ಯಸಿ - ೧೩ಯರ + ೬ರಸಿ).

೧೭. ೬ಯಳಿ - ೪೮ಯರಸಿ + ೯೬ರಸಿ; ೯ಯಳಿ - ೧೨ಯರಸಿ - ೯೬ರಸಿ;

೧೫ಯಳಿ - ೬೬ಯರಸಿ + ೨೪ರಸಿ.

೧೮. ೬ಕ್ಷಿ - ೨೫ಕ್ಷ + ೧೪; ೧೨ಕ್ಷಿ - ೨ಕ್ಷ - ೪; ೩೦ಕ್ಷಿ + ೨೫ಕ್ಷ - ೩೦;

೫೪ಕ್ಷಿ + ೯೯ಕ್ಷ - ೯೦.

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಲಘುತ್ವನು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವು

೯.೧. ೮, ೧೨ ಮತ್ತು ೨೦ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ನೀಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ ೪ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಈ ಉತ್ತರವು ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದಿಂದ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

೮ = ೨.೨.೨ = ೨^೩; ೧೨ = ೨.೨.೩ = ೨^೨.೩; ೨೦ = ೨.೨.೫ = ೨^೨.೫.

∴ ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಕ (ವಿಭಾಜಕ) = ೨^೨ = ೪.

ಮತ್ತು ೮, ೧೨ ಮತ್ತು ೨೦ ಇವುಗಳಿಂದ ನೀಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವಂಥ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇದ್ದರೆ ಅದೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದಿಂದ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಉತ್ತರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಭಾಜ್ಯವು = ೨^೩.೩.೫ = ೧೨೦.

೮, ೧೨ ಮತ್ತು ೨೦ ಇವುಗಳಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವಂಥ ೧೨೦, ೨೪೦, ೩೬೦, ೪೮೦....ರಂಥ ಎಷ್ಟೋ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಆದರೆ ಆ ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೨೦. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ? ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದ ನಂತರ ಆ ಅವಯವಗಳ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಘಾತಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಬೈಜಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅಪವಾದವಲ್ಲ.

ಆಯ ಮತ್ತು ಅರ ಇವುಗಳಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದರೆ ಆಯರ,

ಅಇ^೩ಕ^೩ ಮತ್ತು ಅಇಕ^೩ _____, _____ ಅಇ^೩ಕ^೩, ಮತ್ತು
೮ಪ^೩ಬಮ^೩, ೧೨ಪಬಳಿಮ, ಮತ್ತು ೬ಬ^೩ಮ^೩ _____, _____ ೨೪ಪ^೩ಬಳಿಮ^೩.

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಆ, ಯ, ಮತ್ತು ರ ಈ ಮೂರು ಗುಣಕಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಅವು ಮೂರೂ ಮೊದಲನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿವೆ, ಆದುದ-

ರಿಂದ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಯರ. ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅ, ಇ, ಮತ್ತು ಕ ಈ ಮೂರು ಗುಣಕಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಅ ಮೊದಲನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿದ್ದು ಇ ಯ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವು ೨ನೆಯದಿದೆ, ಮತ್ತು ಕ ದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತವಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಇ^೨ಕ^೪. ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಲ, ೧೨ ಮತ್ತು ೬ ಇವುಗಳಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೪, ಪ ದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವು ೫, ಬ ದ್ದು ಬ^೪ ಮತ್ತು ಮ ದ್ದು ಮ^೩, ಆದುದರಿಂದ ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೪ಪ^೨ಬ^೪ಮ^೩.

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅಥವಾ ರಾಶಿಗಳಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಹೋಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಥವಾ ರಾಶಿಗಳ ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂದೆನ್ನುವರು. ಲಘು ಅಂದರೆ ಸಣ್ಣ, ಲಘುತಮ ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ. ವಿಭಾಜಕ ಅಂದರೆ ಯಾವುದರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಅದರಂತೆಯೇ ವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂದರೆ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ನಾವು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

೯.೨. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಯಾವವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುವದೋ ಆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅವಯವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಲ್ಲಿ ಯಾವವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಅದು ಇರುವದೋ ಆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯು ಅವಯವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

೯ಪಬಯ^೨, ೧೨ಪ^೨ಬ^೩ಯ^೩, ೧೨ಪ^೩ಬ^೪ಯ^೪ ಮತ್ತು ೨೪ಪಯ^೬

ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೩ಪಯ^೨,

ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೨೪ಪ^೩ಬ^೩ಯ^೬.

ಇಲ್ಲಿ ೩ಪಯ^೨ ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ೨೪ಪ^೩ಬ^೩ಯ^೬ ದ ಗುಣಕವಿದೆ ಎಂಬುದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವಾಗ ಯಾವ ಯಾವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ಕಂಡುಬರುವದೋ ಅದರ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾದ ಘಾತವು (ಅಂದರೆಯೇ ಸಾಧಾರಣ

ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಘಾತ) ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯು-
ವಾಗ ಯಾವ ಯಾವ ಗುಣಕವು ಕಂಡುಬರುವದೋ ಅದರ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ-
ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳ-
ಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ:

೧. ಅಃ; ಲಃ. ೨. ೧೦ಕಗ; ೧೫ಕಘ. ೩. ೨ಕಿಗ; ೪ಕಗಿ.
೪. ೬ಕಿಪಮ; ೮ಕಿಪಮಿ. ೫. ೪ಕಪಬ; ೮ಕಿಬಮಿ; ೬ಕಪಿಮ.
೬. ೨ಕ; ೪ಕಗ; ೬ಗದ. ೭. ೮ಕಿಗಪ; ೧೨ಗಿಪಬ; ೨೪ಬಿಪಕಗ.
೮. ೫ಗಯರ; ೮ಗಿದಯರ; ೨೦ದಸಿಯಿರ.
೯. ೧೦ಯಿರಲ; ೧೫ಯಿರಸಿ; ೨೫ಪಯರಸಿ.
೧೦. ಅಃಯಿರ; ೮ಯರಲ; ೧೦ ಅಿರಲ; ೬ಇಯಿಲಿ.
೧೧. ೨ಕಿಗಯಿ; ೩ಕಿಗಿಯ; ೫ಕಗಿಯಿ; ೬ಗಪಿಯಿ.
೧೨. ೧೪ಪಬಯಿ; ೮ಪಿಬಯಿ; ೪ಬಿಯಿ; ೨೮ಪಯರಸಿ.
೧೩. ೨ಯಿರಸಿ; ೬ಯರಸಿ; ೮ಯಿರಲಸಿ; ೧೨ರಲಿಪ.
೧೪. ಅಃಬಿ; ೮ಅಕಬಿ; ೧೫ಇಕಿಬ; ೫ಅಿಇಬಿ.
೧೫. ೧೨ಯಿರಲ; ೮ರಲಿಯಿ; ೬ಲಿಯರಸಿ; ೪ಅಇ.

೯.೩. ಉ. ೧. ಅಪ + ಅಮ, ಅಪಿ + ಅಪಬ + ಅಮಿ, ಮತ್ತು
೬ಪಿ - ೬ಮಿ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$ಅಪ + ಅಮ = ಅ(ಪ + ಮ)$$

$$ಅಪಿ + ಅಪಮ + ಅಮಿ = ಅ(ಪಿ + ಅಪಮ + ಮಿ) = ಅ(ಪ + ಮ)ಿ$$

$$೬ಪಿ - ೬ಮಿ = ೬(ಪಿ - ಮಿ) = ೬(ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ)$$

ಇಲ್ಲಿ ಅ, ಅ ಮತ್ತು ೬ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೧೨. (ಪ + ಮ) ದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ
ದೊಡ್ಡದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವ ಘಾತ (ಪ + ಮ)^೨. ಮತ್ತು (ಪ - ಮ) ಇದು
ಮೊದಲನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.

∴ ೧೨(ಪ + ಮ)ಿ(ಪ - ಮ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೨(ಪ + ಮ) ಇದು ಇದೆ. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು
ಯಾವಾಗಲೂ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ದ ಒಂದು ಗುಣಕ ಇರುವದು. ಕಾರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

ಉ. ೨. ಕಯ + ಗಯ - ೨ಕರ - ೨ಗರ, ೪ಕಯ - ೧೬ಕರ ಮತ್ತು
 ೬ಗಯ - ೨೪ಗಯರ + ೨೪ಗರ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕಯ+ಗಯ-೨ಕರ-೨ಗರ = ಯ(ಕ+ಗ)-೨ರ(ಕ+ಗ) = (ಕ+ಗ)(ಯ-೨ರ)
 ೪ಕಯ-೧೬ಕರ = ೪ಕ(ಯ-೪ರ) = ೪ಕ(ಯ+೨ರ)(ಯ-೨ರ)
 ೬ಗಯ-೨೪ಗಯರ+೨೪ಗರ = ೬ಗ(ಯ-೪ರ-೪ರ) = ೬ಗ(ಯ-೨ರ)
 \therefore ೧೨ಕಗ(ಕ+ಗ)(ಯ+೨ರ)(ಯ-೨ರ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಯ - ೨ರ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುವದು.

ಉ. ೩. ೨ಪತಿ+೧೬ಮತಿ, ೩ಪತಿ-೨೪ಮತಿ ಮತ್ತು

೬ಪತಿ+೨೪ಪತಿಮತಿ + ೯೬ಮತಿ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨ಪತಿ + ೧೬ಮತಿ = ೨(ಪತಿ + ೮ಮತಿ)
 = ೨(ಪ + ೨ಮ) (ಪ - ೨ಪಮ + ೪ಮ)

೩ಪತಿ - ೨೪ಮತಿ = ೩(ಪತಿ - ೮ಮತಿ)
 = ೩(ಪ - ೨ಮ) (ಪ + ೨ಪಮ + ೪ಮ)

೬ಪತಿ + ೨೪ಪತಿಮತಿ + ೯೬ಮತಿ

= ೬(ಪತಿ + ೪ಪತಿಮತಿ + ೧೬ಮತಿ)

= ೬ { (ಪ + ೪ಮ) - ೪ಪತಿಮತಿ }

= ೬(ಪ+೨ಪಮ+೪ಮ)(ಪ - ೨ಪಮ + ೪ಮ)

\therefore ೬(ಪ+೨ಮ)(ಪ-೨ಮ)(ಪ+೨ಪಮ+೪ಮ)(ಪ-೨ಪಮ+೪ಮ)

ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ೪. ೬ಯ - ೧೩ಯರ + ೬ರ, ೧೦ಯ - ೭ಯರ - ೧೨ರ
 ಮತ್ತು ೮ಯ + ೨ಯರ - ೨ರ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೬ಯ - ೧೩ಯರ + ೬ರ = ೬ಯ - ೯ಯರ - ೪ಯರ + ೬ರ

= ೩ ಯ(೨ಯ - ೩ರ) - ೨ರ(೨ಯ - ೩ರ)

= (೨ಯ - ೩ರ)(೩ಯ - ೨ರ)

೧೦ಯ - ೭ಯರ - ೧೨ರ = ೧೦ಯ - ೧೫ಯರ + ೮ಯರ - ೧೨ರ

= ೫ಯ(೨ಯ - ೩ರ) + ೪ರ(೨ಯ - ೩ರ)

= (೨ಯ - ೩ರ)(೫ಯ + ೪ರ)

$$\begin{aligned} \text{ಉಯಿ} + \text{ಉಯರ} - \text{ಉಗರ} &= \text{ಉಯಿ} - \text{ಉಯರ} + \text{ಉಯರ} - \text{ಉಗರ} \\ &= \text{ಉಯ}(\text{ಉಯ} - \text{ಉರ}) + \text{ಉರ}(\text{ಉಯ} - \text{ಉರ}) \\ &= (\text{ಉಯ} - \text{ಉರ})(\text{ಉಯ} + \text{ಉರ}) \end{aligned}$$

∴ (ಉಯ-ಉರ)(ಉಯ-ಉರ)(ಉಯ+ಉರ)(ಉಯ+ಉರ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.
ಉಯ - ಉರ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ. ಖ. ಉಪಸಿ-ಉಪಸಮ-ಉಮಸಿ, ಉಪಸಿ-ಉಪಸಮ-ಉಂಮಸಿ,
ಮತ್ತು ಉಪಸಿ-ಉಂಮಸಮ+ಉಂಮಸಿ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಉಪಸಿ} - \text{ಉಪಸಮ} - \text{ಉಮಸಿ} &= \text{ಉ}(\text{ಉಪಸಿ} - \text{ಉಪಸಮ} - \text{ಉಮಸಿ}) \\ &= \text{ಉ}(\text{ಉಪಸಿ} + \text{ಉಪಸಮ} - \text{ಉಂಮಸಮ} - \text{ಉಮಸಿ}) \\ &= \text{ಉ} \{ \text{ಉಪ}(\text{ಉಪ} + \text{ಉಮ}) - \text{ಉಮ}(\text{ಉಪ} + \text{ಉಮ}) \} \\ &= \text{ಉ}(\text{ಉಪ} + \text{ಉಮ})(\text{ಉಪ} - \text{ಉಮ}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉಪಸಿ} - \text{ಉಪಸಮ} - \text{ಉಂಮಸಿ} &= \text{ಉ}(\text{ಉಪಸಿ} - \text{ಉಪಸಮ} - \text{ಉಂಮಸಿ}) \\ &= \text{ಉ}(\text{ಉಪ} + \text{ಉಮ})(\text{ಉಪ} - \text{ಉಮ}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉಪಸಿ} - \text{ಉಂಮಸಮ} + \text{ಉಂಮಸಿ} &= \text{ಉ}(\text{ಉಪಸಿ} - \text{ಉಂಮಸಮ} + \text{ಉಂಮಸಿ}) \\ &= \text{ಉ}(\text{ಉಪ} - \text{ಉಮ})(\text{ಉಪ} - \text{ಉಮ}) \end{aligned}$$

∴ ಉ(ಉಪ - ಉಮ)(ಉಪ - ಉಮ)(ಉಪ + ಉಮ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಉ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುತ್ತದೆ.

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಬರೆಯುವ ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗವು ಹೀಗೆ: ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯ ಎಲ್ಲ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ತರುವಾಯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಅನಂತರ ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿಯೂ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಲ್ಲದವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಯ ವರೆಗೆ ಹೋಗಬೇಕು. ಇಲ್ಲವೆ, ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಾದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ಮತ್ತು ಬಳಿಕ ಅದರಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಇತರ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಘಾತದ ಸಮಾವೇಶವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ಯಿ - ಯ - ಉ; ಯಿ + ಖಯ + ಉ; ಯಿ - ಖಯ - ಉ.

೨. ಖಯಿ - ಖಯ + ಉ; ಖಯಿ + ಖಯ - ಉ, ಖಯಿ + ಖಯ - ಉ.

೩. ಖಬಯು+ಖಬಕ್ಷ; ಖಯು+ಲಯಕ್ಷ+ಖಕ್ಷ; ಖಯು+ಽಯಕ್ಷ-ಽಕ್ಷ.
೪. ಖಯು-ಁರ; ಗ್ರಯು-ಗ್ರಯರ-ಽರ; ಽಯು-ಗ್ರಯರ+ಗ್ರರ.
೫. ಽಯು + ಽಯರ - ಁರ; ಁಯು + ಁಯರ + ಽರ;
ಖಯು + ಽಯರ - ಁರ.
೬. ಖಲಯು + ಗ್ರಯ - ಗ್ರ; ಁಯು + ಁಯ - ಽ;
ಽಯು - ಁಯ + ಗ್ರ.
೭. ಗ್ರ-ಗ್ರಯ+ಽಯ; ಽ-ಗ್ರಯ+ಁಯ; ಁ-ಽಯ-ಁಯ.
೮. ಽ-ಁಯ+ಗ್ರಯ; ಗ್ರ-ಁಯ+ಗ್ರಯ;
ಗ್ರ-ಗ್ರಯ+ಗ್ರಯ.
೯. ಽರ+ಁರಸ-ಽಸ; ಁರ-ಁರಸ+ಗ್ರಸ;
ಗ್ರರ-ಽರಸ+ಽಸ.
೧೦. ಽರ-ಁರ+ಗ್ರ; ಗ್ರರ-ಗ್ರರ+ಽಗ್ರ; ಖರ-ಽರ+ಗ್ರ.
೧೧. ಽರ-ಁಲ; ಽರ+ಗ್ರರಲ+ಽಲ;
ಽರ-ಗ್ರರಲ+ಗ್ರಲ.
೧೨. ಁಯು-ಗ್ರಕ್ಷ; ಽಯು-ಁಯಕ್ಷ-ಽಕ್ಷ; ಽಯು-ಁಯಕ್ಷ-ಽಕ್ಷ.
೧೩. ಁಯು+ಗ್ರಯರ-ಽರ; ಁಯು+ಲಯರ-ಽರ;
ಁಯು-ಗ್ರಯರ+ರ.
೧೪. ಪ - ಖಮ; ಪ + ಽಮ; ಪ + ಖಮಮ + ಗ್ರಮ.
೧೫. ಽಪ+ಽಮ; ಗ್ರಮಮ-ಽಮ; ಽಪ-ಽಮಮ+ಽಮಮ.
೧೬. ಖಪಯ-ಽಪವ+ಽಮಯ-ಽಮವ; ಗ್ರಪ+ಗ್ರಮಮ-ಗ್ರಮಮ;
ಽಯು-ಗ್ರಮವ-ಽಮ.
೧೭. ಽಕ-ಗ್ರಕ; ಁಕ-ಽಕ-ಽಕ+ಽಕ;
ಁಕ+ಽಕ-ಽಕ.
೧೮. ಁಮ-ಽಗಮ+ಽಮ; ಁಮ+ಗ್ರಮ-ಽಮ; ಁಮ+ಽಗಮ+ಽಮ;
ಁಮ-ಗ್ರಮ-ಽಮ.
೧೯. ಽಯು+ಗ್ರಯರ-ಽರ; ಽಯು-ಽಯರ-ಗ್ರರ;
ಽಯು+ಽಯರ+ಗ್ರರ; ಗ್ರಯು-ಽಯರ+ಗ್ರರ.
೨೦. ಽಯು-ಗ್ರಯರ+ಗ್ರರ; ಽಯು+ಽಯರ+ಽಮರ;
ಽಯು-ಗ್ರಯರ-ಽರ; ಗ್ರಯು+ಗ್ರಯರ-ಽರ.

೨೧. ಪಃ-೧೬ಮಃ; ೨ಪಃ-೩ಪಃಮಃ-೨೦ಮಃ;
೨ಪಃ+೧೩ಪಃಮಃ+೨೦ಮಃ.
೨೨. ಲಘು-೯ಕಃ; ಲಘು+೨೨ಕಃ; ಲಘು-೨೨ಕಃ;
೧೬ಲಘು+೩೬ಲಘುಕಃ+೨೦ಲಘುಕಃ.
೨೩. ೨ಯಃ-೧೧ಯವ+೧೧ವಃ; ೨ಯಃ+೧೧ಯವ+೧೧ವಃ;
೪ಯಃ-೨೫ವಃ; ಯಃ-೯ವಃ.
೨೪. ೨೨೯ಪಃ-೬೪ಮಃ; ೩೬ಪಃ+೬೫ಪಮ-೩೬ಮಃ;
೧೬೨೯ಪಃ+೨೨೯ಪಮ+೩೬೨೯ಪಮಃ.
೨೫. ೨೮ಯಃ-೧೦೬ಯವ+೨೮ವಃ; ೨೮ಯಃ+೬೨ಯವ-೨೦ವಃ;
೨೮ಯಃ-೨೮ಯವ-೨೪೫ವಃ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವೆರಡನ್ನೂ ತಿಳಿಯಿರಿ.

೨೬. ಯಃ-೧೭ಯಃ+೫೨; ಯಃ+೫೨ಯಃ-೩೬; ಯಃ+೨೧ಯಃ-೧೦೦;
೬೨ಯಃ-೪೮ಯಃ+೯೬.
೨೭. ೧೫ವಃ-೩೪ವಃ+೧೫; ೩೦ವಃ+೩೨ವಃ-೩೦; ೭೫ವಃ-೯೦ವಃ+೨೭;
೧೦೦ವಃ-೩೬.
೨೮. ಲಘು-೪೯ಮಃ; ೭೨೯ಪಃ+೩೪೩ಮಃ; ೬೩ಪಃ-೩೨ಪಮ-೬೩ಮಃ.
೨೯. ಲಘು-೫೮ಕಃ+೨೭ಗಃ; ಲಘು-೩೫ಕಃ+೫೪ಗಃ;
೧೬ಲಘು-೨೧೬ಕಃ+೭೨೯ಗಃ.
೩೦. ೧೨ಕಃ-೨೨ಕಃಗಃ+೨೮ಕಃಗಃ; ೧೬ಕಃಗಃ-೩೨ಕಃಗಃ+೧೨ಕಃಗಃ;
೩೬ಕಃಗಃ-೪೨ಕಃಗಃ+೧೨ಕಃಗಃ.



ಹತ್ತನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ

೧೦.೧. ಕ್ರಿ, ೨, ೧೧ ಈ ತರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ಒಳ್ಳೆ ಪರಿಚಿತವಿವೆ. ಅವುಗಳಿಗೆ ನಾವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದು ಅನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನಡುವಿನ ಗೆರೆಯ ಮೇಲಿನ ೩, ೪, ೯ ಮೊದಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅಂಶವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆಯಿದ್ದು, ೮, ೭, ೧೧ ಮೊದಲಾದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಭೇದವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದೆಯೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ೩, ೪, ೯, ೮, ೭, ೧೧ ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆಯೇ ಅಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೩ ರೂ.ಗಳನ್ನು ೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು ಕ್ರಿ ರೂ. ಇರುವುದು.

೪ ರೂ.ಗಳನ್ನು ೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು $\frac{೪}{೮}$ ರೂ. ಇರುವುದು.

೩ ರೂ.ಗಳನ್ನು ೭ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು $\frac{೩}{೭}$ ರೂ. ಇರುವುದು.

ಮತ್ತು ೪ ರೂ.ಗಳನ್ನು ೭ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು $\frac{೪}{೭}$ ರೂ. ಇರುವುದು.

ಕ್ರಿ, ೨, ೧೧ ಇವುಗಳಂತೆಯೇ $\frac{೪}{೮}$, $\frac{೩}{೭}$, $\frac{೪}{೭}$ ಇವು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ

ರಚಿಸಿದ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಸಹಜವಾಗಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು, ವಜಾಬಾಕಿ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ ಮೊದಲಾದ ಸಂಗತಿ-

ಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ಎಲ್ಲ ನಿಯಮಗಳು ಇವುಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿಯೂ ಹಾಗೆಯೇ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ವಿಷಯವಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಹೊಸದಾಗಿ ಈಗ ಕಲಿಯುವಂತಹದು ಏನೂ ಇಲ್ಲ.

೧೦.೨. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಭಿಪ್ರೇತ ಅರ್ಥಗಳು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಕ್ಷಿಪ್ರ ಅರ್ಥವು ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಲ ಸರಿಯಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ೩ ಭಾಗಗಳು ಹೀಗೆ, ಅಥವಾ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು (ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು) ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ, ಹೇಗೆಂದರೆ ಆನಂದರಾಯರು ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರು ಇವರಿಬ್ಬರು ಪಾಲುಗಾರಿಕೆಯ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ೩:೮ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಣವನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿದ್ದಾರೆ, ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಆನಂದರಾಯರ ಭಾಂಡವಲು ೩೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ವಸಂತರಾಯರದು ೮೦೦೦ ರೂ. ಇರುವದು, ಅಥವಾ ೩ರ ಸರಿಯಾಗಿ ೮ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದರೆ ೩ ಭಾಗಲೆ ೮ ಎಂದು ಆಗುತ್ತದೆ. ಪ್ಲೆದಂಥ ಅನ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಿದ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿಯೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅರ್ಥವು ಅಭಿಪ್ರೇತವಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾವು ಯಾವದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಅರ್ಥದಿಂದಲೇ, ಅಂದರೆ ಕ್ಷಿಪ್ರ ಅಂದರೆ ೩ ಭಾಗಲೆ ೮, ಪ್ಲೆ ಅಂದರೆ ೮ ಭಾಗಲೆ ೩ ಈ ಅರ್ಥದಿಂದ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

೧೦.೩. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ಅಷ್ಟೇ ಇರುತ್ತದೆ, ಸ್ವರೂಪ ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ, ಕ್ಷಿಪ್ರ $= \frac{೩}{೮} \times \frac{೨}{೨} (= \frac{೬}{೧೬}) = \frac{೩}{೮} \times \frac{೪}{೪} (= \frac{೧೨}{೩೨}) = \frac{೩}{೮} \times \frac{೮}{೮} (= \frac{೨೪}{೬೪})$.

ಒಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹ ಈ ಸಂಗತಿಯ ನಿಜತ್ವವನ್ನು ನಾವು ಮನಗಾಣಿಸಬಹುದು. ಕ್ಷಿಪ್ರ ರೂ. ಅಂದರೆ ರೂಪಾಯಿಯ ಚವಲಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೩ ಚವಲಗಳು, ಕ್ಷಿಪ್ರ ರೂ. ಅಂದರೆ ಅದರ ಅಣೆಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ

ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೬ ಆಣೆಗಳು, ೧೨ ರೂ. ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ ಆಣೆಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೧೨ ಅರ್ಧ ಆಣೆಗಳು. ಮತ್ತು ೨೪ ರೂ. ಅಂದರೆ ಬಿಲ್ಲಿಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೨೪ ಬಿಲ್ಲಿಗಳು. ಈಗ ೩ ಚವಲಿಗಳು = ೬ ಆಣೆಗಳು = ೧೨ ಅರ್ಧ ಆಣೆಗಳು = ೨೪ ಬಿಲ್ಲಿಗಳು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $\frac{೨೪}{೪೮} = \frac{೨೪ \div ೩}{೪೮ \div ೩} (= \frac{೮}{೧೬}) = \frac{೨೪ \div ೬}{೪೮ \div ೬} (= \frac{೪}{೧೨}) = \frac{೨೪ \div ೮}{೪೮ \div ೮} (= \frac{೩}{೬})$. ೨೪ ರೂ. ೪೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ೮ ರೂ. ೧೬ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ೪ ರೂ. ೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ೩ ರೂ. ೬ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲಿಗೆ ಅಷ್ಟೇ ರಕಮು (ಅರ್ಧ ರೂಪಾಯಿಯು) ಬರುವದು.

$$\text{ಆದುದರಿಂದ } \frac{ಪ}{ಬ} = \frac{ಪ \times ಮ}{ಬ \times ಮ} (= \frac{ಪಮ}{ಬಮ}) = \frac{ಪ \div ಮ}{ಬ \div ಮ}.$$

೧೦.೪. ೩೬, ೧೮, ೯, ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೨, ೪ ಮತ್ತು ೬ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ೩, ೪, ೧, ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ನಾವು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದಗಳಿಗೆ ಅ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $\frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$ ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಮತ್ತು $\frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಸ್ವರೂಪಗಳು ಮಾತ್ರ ಭಿನ್ನವಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಹ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಬಹುದು. $\frac{೨೪}{೪೮} = ೨೦ \div ೨೪ = (೪ \times ೫)$ ಭಾಗಲೆ $(೪ \times ೬) = ೪ \times ೫$ ಭಾಗಲೆ ೪ ಭಾಗಲೆ ೬ = ೫ ಭಾಗಲೆ ೬ = ೫, ಅದರಂತೆಯೇ, $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ} = ಅಯ$ ಭಾಗಲೆ $ಅಕ್ಷ = ಅಯ$ ಭಾಗಲೆ $ಅ$ ಭಾಗಲೆ $ಕ್ಷ = ಯ$ ಭಾಗಲೆ $ಕ್ಷ = \frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$. ಆದುದರಿಂದ $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಈ

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ನಮಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $\frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು, ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ $\frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಅ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಅಯ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು (ಸರಳರೂಪವನ್ನು) ಕೊಡುವದಿದ್ದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಮೇಲೆ $\frac{೨೫}{೧೬}$, $\frac{೧೬}{೧೬}$, $\frac{೧೬}{೧೬}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

೧೦.೫. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವದೆಂದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಬೇಕು, ಮತ್ತು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವದೆಂದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮಾಡಬೇಕು.

$$\text{ಉ. ೧. } \frac{೧೦೮}{೧೪೪} = \frac{೨ \cdot ೨೩೨}{೨೪ \cdot ೨೨} = \frac{೨}{೨} = \frac{೨}{೨} \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } ೨ \cdot ೨೩೨, \text{ ಅಂದರೆ } ೩೬$$

ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಉ. ೨. } \frac{೨೨೫}{೨೨೫} = \frac{೨೨೫}{೨೨೫} \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } ೨೨೫ \text{ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುತ್ತದೆ.}$$

$$\text{ಉ. ೩. } \frac{೧೫೨೫೫೫೫}{೩೫೨೫೫೫೫} = \frac{೩೫೫}{೩೫೫} \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } ೫೨೫೫೫ \text{ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.}$$

ಇದೆಯೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈ ಮ. ಸಾ. ವಿ.ಯಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಭಾಗಿಸುವದೆಂದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕುವದು. ಈ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು ಯಾವವು ಎಂದು ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು

$\frac{೫ \times ೩ \times ೮ \times ೩ \times ೪ \times ೪}{೫ \times ೭ \times ೮ \times ೮ \times ೩ \times ೪}$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ನಂತರ ಬಹಳ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೫.

ಕೆಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. $\frac{೮೪೩}{೮೪೩}$ ೨. $\frac{೪೦೪೩}{೩೪೪೩}$ ೩. $\frac{೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪}$ ೪. $\frac{೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪}$
೫. $\frac{೩೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪}$ ೬. $\frac{೪೪೪೪೪೪}{೩೪೪೪೪೪}$ ೭. $\frac{೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪}$
೮. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪}$ ೯. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪}$ ೧೦. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪}$
೧೧. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪೪}$ ೧೨. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪೪}$ ೧೩. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}$
೧೪. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪೪}$ ೧೫. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}$ ೧೬. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}$
೧೭. $\frac{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}{೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪೪}$

೧೦.೬. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಮಗೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ಅವುಗಳ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಗುಣಕಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣದೇ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು

ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ-
ವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\text{ಉ. ೧. } \frac{೨ಕಯ+೨ಕಕ್ಷ}{೨ಪಯ+೨ಪಕ್ಷ} = \frac{೨ಕ(ಯ+ಕ್ಷ)}{೨ಪ(ಯ+ಕ್ಷ)} = \frac{೨ಕ}{೨ಪ}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯ + ಕ್ಷ ಇದು ಸಾಧಾರಣ
ಗುಣಕವಿದೆ. ಅದನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿದೆ, ಅಂದರೆಯೇ ಅಂಶ ಮತ್ತು
ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದೆ.

$$\text{ಉ. ೨. } \frac{೮ಕಪ+೨೦ಕನು}{೧೨ನಪ+೨೦ನಮ} = \frac{೪ಕ(೨ಪ+೫ನು)}{೬ನ(೨ಪ+೫ನು)} = \frac{೨ಕ}{೩ನ}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೩. } \frac{೧೨ಅಕ(ಅ-ಕ)}{೧೮ಇಕ(ಅ+೨ಅಕ+ಕ)} &= \frac{೧೨ಅಕ(ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ)}{೧೮ಇಕ(ಅ+ಕ)} \\ &= \frac{೨ಅ(ಅ-ಕ)}{೩ಇ(ಅ+ಕ)} \end{aligned}$$

$$\text{ಉ. ೪. } \frac{ಯ-೪ಯ-೩೨}{ಯ-೫ಯ-೨೪} = \frac{(ಯ+೪)(ಯ-೮)}{(ಯ+೩)(ಯ-೮)} = \frac{ಯ+೪}{ಯ+೩}$$

$$\text{ಉ. ೫. } \frac{೧೨ಯ+೧೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ}{೧೫ಯ+೧೩ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ} \text{ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪ ಕೊಡಿರಿ.}$$

$$\begin{aligned} ೧೨ಯ+೧೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ &= ೧೨ಯ+೩೨ಯಕ್ಷ-೨೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ \\ &= ೪ಯ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)-೭ಕ್ಷ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ) \\ &= (೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೪ಯ-೭ಕ್ಷ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೧೫ಯ+೧೩ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ &= ೧೫ಯ+೪೦ಯಕ್ಷ-೨೭ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ \\ &= ೫ಯ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)-೯ಕ್ಷ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ) \\ &= (೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೫ಯ-೯ಕ್ಷ). \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{೧೨ಯ+೧೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ}{೧೫ಯ+೧೩ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ} = \frac{(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೪ಯ-೭ಕ್ಷ)}{(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೫ಯ-೯ಕ್ಷ)} = \frac{೪ಯ-೭ಕ್ಷ}{೫ಯ-೯ಕ್ಷ}$$

$$\text{ಉ. ೬. } \frac{೭೨ಪ²-೪೦೯ಪಮು೬}{೧೬೨ಪಳಿಮು+೨೮೮ಪಮಿ+೫೧೨ಮಿ}$$

ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ-
ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

ಕೆಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

೧. $\frac{\text{ಅಯ} + \text{ಇಯ}}{\text{೧೨ಅಯ} + ೧೨ಇಯ}$

೨. $\frac{\text{ಜಪಯ} + \text{ಜಪರ}}{\text{೧೫ಬಯ} + ೧೫ಬರ}$

೩. $\frac{\text{ಅಕಯ} + \text{ಅಗಯ}}{\text{೩೬ಕರ} + ೩೬ಗರ}$

೪. $\frac{\text{ಅಜಯ} + \text{ಅಜರ}}{\text{೩೫ಕಯ} + ೩೫ಕರ}$

$\frac{\text{೧೬ಕಯ} + ೧೬ಕರ}{\text{೪೮ಕವ} + ೪೮ಕಸ}$

೬. $\frac{\text{೪ಪ} + ೧೨ಮ}{\text{೧೬ಪಬ} + ೪೮ಬಮ}$

೭. $\frac{\text{೮ಪಯ} + ೪೮ಪರ}{\text{೯ಬಯ} + ೫೪ಬರ}$

೮. $\frac{\text{೨೭ಪಯ} + ೪೫ಪರ}{\text{೧೮ಪಯ} + ೫೪ಪರ}$

೯. $\frac{\text{೪ಕ} + ೪ಗ}{\text{೮ಕ} - ೮ಗ}$

೧೦. $\frac{\text{ಅ} - ೪}{\text{೮} - ೧೬}$

೧೧. $\frac{\text{೨ಕ} + ೭ಗ}{\text{೪ಕ} - ೪ಗ}$

೧೨. $\frac{\text{ಮ} - ೨೫}{\text{ಮ} - ೩ಮ - ೧೦}$

೧೩. $\frac{\text{೮ಪ} - ೧೮}{\text{೧೨ಪ} + ೧೨ಪ - ೯}$

೧೪. $\frac{\text{೯ಪ} - ೨೫}{\text{೮೫ಪ} - ೬೨೫}$

೧೫. $\frac{\text{೧೪೪ಪ} - ೧೬೯ಮ}{\text{೧೪೪ಪ} + ೧೪೪ಪಮ - ೧೩ಮ}$

೧೬. $\frac{\text{೮ಅ} - ೧೨ಕ}{\text{೧೬ಅ} - ೩೬ಕ}$

೧೭. $\frac{\text{೧೦ಪಯ} + ೧೨ಪವ}{\text{೭೫ಬಯ} - ೧೦೮ಬವ}$

೧೮. $\frac{\text{೩೬ಯ} - ೪೯ಲ}{\text{೩೬ಯ} + ೮೪ಯಲ + ೪೯ಲ}$

೧೯. $\frac{\text{೪ರ} - ೩೬ರಸ + ೮೧ಸ}{\text{೮ರ} - ೧೬೨ಸ}$

೨೦. $\frac{\text{೪ಯ} - ೧೫ಯಸ - ೨೫ಸ}{\text{ಯ} - ೨೫ಸ}$

೨೧. $\frac{\text{೧೬ಯ} + ೫೬ಯರ + ೪೯ರ}{\text{೨೦ಯ} + ೩೧ಯರ - ೭ರ}$

೨೨. $\frac{\text{೪ಪ} - ೩೬ಪಮ + ೮೧ಮ}{\text{೨೦ಪ} - ೯೬ಪಮ + ೨೭ಮ}$

೨೩. $\frac{\text{೧೬ಯ} - ೧೦ಯರ + ೮ರ}{\text{೨೪ಯ} - ೧೧ಯರ + ೮ರ}$

೨೪. $\frac{\text{೨೦ಯ} + ೪೧ಯರ - ೯ರ}{\text{೨೦ಯ} - ೯ಯರ + ೮ರ}$

೨೫. $\frac{\text{೯ರ} + ೯ರಸ - ೨೮ಸ}{\text{೯ರ} + ೧೮ರಸ - ೪೦ಸ}$

೨೬. $\frac{\text{೩೨ಪ} + ೪೦ಪಮ - ೧೦೦ಮ}{\text{೧೨೦ಪ} - ೧೯೦ಪಮ + ೫೦ಮ}$

೨೭. $\frac{\text{೧೦ಅ} - ೪೧ಅ + ೨೧}{\text{೧೫ಅ} - ೪ಅ - ೩}$

೨೮. $\frac{\text{೩೦ಪ} - ೨೨ಪ - ೨೮}{\text{೧೦೦ಪ} - ೧೬೫ಪ + ೩೫}$

$$೨೯. \frac{೬ಪಯಃ - ೨೮ಪಯಃ + ೩೨ಪರಃ}{೨೪ಬಯಃ - ೮೮ಬಯಃ + ೬೪ಬರಃ}$$

$$೩೦. \frac{ಯಃ + ೩ಯಃ - ೪ಯಃ - ೧೨ರಃ}{೨ಯಃ - ೪ಯಃ - ೮ಯಃ + ೪ರಃ} \quad ೩೧. \frac{ಕಃ - ೮ಪಃ}{ಕಃ - ೪ಪಃ}$$

$$೩೨. \frac{೬೪ಬಃ + ೨೭ಮಃ}{೬೪ಬಃ + ೯೬ಬಃಮಃ + ೩೬ಬಮಃ}$$

$$೩೩. \frac{೨೭ತಃ - ನಃ}{೮೧ತಃ + ೯೩ನಃ + ನಃ} \quad ೩೪. \frac{೪ಯಃ + ೨೦ಯಃ + ೧೬ಪಃ}{೧೬ಯಃ + ೬೮ಯಃ + ೧೬ಪಃ}$$

$$೩೫. \frac{೧೫ಯಃ - ೯ಯಃ + ೬ಪಃ}{೧೫ಯಃ + ೨೧ಯಃ + ೬ಪಃ} \quad ೩೬. \frac{೧೬ದಃ - ೮೧ನಃ}{೧೬ದಃ + ೩೨ದಃನಃ - ೯ನಃ}$$

$$೩೭. \frac{೭೨೯ಯಃ - ೪೮೦ಯಃ}{೮೦೦೦ - ೩೪೩ರಃ} \quad ೩೮. \frac{೧೦೦೦ - ೩೪೩ರಃ}{೨೦೦೦ಯಃ - ೨೮೦೦೦ಯಃ + ೮೦೦೦೦ಯಃ}$$

$$೩೯. \frac{೫೧೦ + ೧೩೩೧ಯಃ}{೧೯೨೮ + ೫೨೮೮ಯಃ + ೩೬೩೮ಯಃ}$$

೨.

ಗುಣಾಕಾರ.

೧೦.೭. ಕ್ಷಿ ಮತ್ತು ಜ್ಞಿ ಅಥವಾ $\frac{ಕ್ಷಿ}{೨} \times \frac{ಜ್ಞಿ}{೨} \times \frac{ಕ್ಷಿ}{೨}$ ಈ ತರದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? ಅಂಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಭೇದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು ಇಷ್ಟು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೨೫ ಮತ್ತು ೧೫೫ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{ಪ}{೨}$ ಮತ್ತು $\frac{ಭ}{೨}$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು $\frac{ಪಭ}{೨}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಇದು ಸಹಜವಾಗಿದೆ. $\frac{ಪ}{೨}$ ಕ್ಕೆ $\frac{ಭ}{೨}$

ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು ಅಂದರೆ $\frac{ಪ}{ಬ}$ ಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಭದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು ($\frac{ಪ}{ಬ}$ ದ ಭ ಪಟ್ಟು ಮಾಡುವದು) ಮತ್ತು ಈ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಮದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದು (ಮನೆಯ ಪಾಲನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು) $\frac{ಪ}{ಬ}$ ಕ್ಕೆ ಭದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರವು $\frac{ಪಭ}{ಬ}$ ಮತ್ತು ಈ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಮದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಉತ್ತರವು $\frac{ಪಭ}{ಬಮ}$. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{ಪ}{ಬ} \times \frac{ಭ}{ಮ} \times \frac{ಯ}{ವ} = \frac{ಪಭಯ}{ಬಮವ}$. ಎಷ್ಟೋ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೂ ಇದೇ ನಿಯಮವು ಅನ್ವಯಿಸುವದು.

$$\text{ಬೇಕಾಗಿರುವ ಗುಣಾಕಾರ} = \frac{\text{ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\text{ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}$$

ಸಹಜವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದು ಹಾಕುವೆವು ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವೆವು. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಈಗಿನ ವರೆಗೆ ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\frac{೫}{೨}, \frac{೩}{೪}, \frac{೭}{೮}$ ಮತ್ತು $\frac{೧೧}{೧೦}$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು $\frac{೫ \times ೩ \times ೭ \times ೧೧}{೨ \times ೪ \times ೮ \times ೧೦}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವಂಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ, $\left(\frac{೫}{೨} \times \frac{೩}{೪} \times \frac{೭}{೮} \times \frac{೧೧}{೧೦} \right)$ ತರುವಾಯ $\frac{೧೧}{೧೦}$ ಎಂದು ಬರೆಯು-

ತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಮಾಡಿ ಹೇಗೆ ಬರೆದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\text{ಉ. ೧. } \frac{೨}{೪} \times \frac{೩}{೬} = \frac{೨}{೪}.$$

$$\text{ಉ. ೨. } \frac{೨೫೦}{೩೬೦೦} \times \frac{೬೪೦೦}{೫೭೬೦} \times \frac{೧೦೮೦೦}{೨೫೨೦} = \frac{೮೦೦೦}{೨೫೨೦}.$$

$$\text{ಉ. ೩. } \frac{\text{ಅ-ಕ}}{\text{ಅಕ}} \times \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಅ+ಅಕ}} = \frac{(\text{ಅ+ಕ})(\text{ಅ-ಕ})}{\text{ಅಕ}} \times \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಅ(ಅ+ಕ)}} = \frac{\text{ಅ-ಕ}}{\text{ಅ}}.$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೪. } & \frac{\text{ಯ} + \text{ಅಯರ} + \text{ಅರ}}{\text{ಯ} - \text{ಅರ}} \times \frac{\text{ಯ} + \text{ಅಯರ} + \text{ಅರ}}{\text{ಯ} - \text{ಅರ}} \\ &= \frac{(\text{ಯ} + \text{ಅರ})^2}{(\text{ಯ} + \text{ಅರ})(\text{ಯ} - \text{ಅರ})} \times \frac{(\text{ಯ} + \text{ಅರ})^2}{(\text{ಯ} + \text{ಅರ})(\text{ಯ} - \text{ಅರ})} = \frac{(\text{ಯ} + \text{ಅರ})(\text{ಯ} + \text{ಅರ})}{(\text{ಯ} - \text{ಅರ})(\text{ಯ} + \text{ಅರ})}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೫. } & \frac{\text{ಗಪ-ಅಪಮ}}{\text{ಗಪಮ+ಅಮ}} \times \frac{\text{ಗಪ-ಅಮ}}{\text{ಗಪ-ಅಮ}} \\ & \times \frac{\text{ಅಪ+ಅಮ}}{\text{ಗಪ+ಗಪಮ+ಗಮ}} = \frac{\text{ಅಪ(ಗಪ-ಅಮ)}}{\text{ಅಮ(ಅಪ+ಗಮ)}} \times \frac{\text{ಗ(ಗಪ-ಅಮ)}}{\text{ಅ(ಅಪ-ಗಮ)}} \\ & \times \frac{\text{ಅ(ಅಪ+ಅಮ)}}{\text{ಅ(ಅಪ+ಅಮ+ಗಮ)}} = \frac{\text{ಅಪ(ಅಪ-ಅಮ)}(\text{ಅಪ+ಅಮ+ಗಮ})}{\text{ಅಮ(ಅಪ+ಅಮ)}(\text{ಗಪ-ಅಮ+ಅಮ})} \\ & \times \frac{\text{ಗ(ಅಪ+ಅಮ)}(\text{ಅಪ-ಅಮ})}{\text{ಅ(ಅಪ+ಅಮ)}(\text{ಅಪ-ಅಮ})} \times \frac{\text{ಅ(ಅಪ+ಅಮ)}}{\text{ಅ(ಅಪ+ಅಮ+ಗಮ)}} \\ &= \frac{\text{ಗಪ(ಅಪ-ಅಮ)}}{\text{ಅಮ(ಗಪ-ಅಮ+ಅಮ)}}. \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

$$\text{೧. } \frac{\text{ಅಕತ}}{\text{ಗಗನ}} \times \frac{\text{ಅಗಬಮ}}{\text{ಅಕಪ}} \quad \text{೨. } \frac{\text{ಕ}}{\text{ಗ}} \times \frac{\text{ಗ}}{\text{ತ}} \quad \text{೩. } \frac{\text{ಜಯ}}{\text{ರ}} \times \frac{\text{ರ}}{\text{ಅಯ}}.$$

$$\text{೪. } \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಅಗಘ}} \times \frac{\text{ಅಗಯ}}{\text{ಅಕರ}} \quad \text{೫. } \frac{\text{ಕಯ}}{\text{ಅರಸ}} \times \frac{\text{ಗಜಯರ}}{\text{ಅಕನ}} \quad \text{೬. } \frac{\text{ಪ}}{\text{ಬ}} \times \frac{\text{ಬ}}{\text{ಮ}} \times \frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}}.$$

$$\text{೭. } \frac{\text{ಪ}}{\text{ಬ}} \times \frac{\text{ಬ}}{\text{ಮ}} \times \frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}} \quad \text{೮. } \frac{\text{ಅಪಯ}}{\text{ಅಕಕ್ಷ}} \times \frac{\text{ಗಜಕಕ್ಷ}}{\text{ಅಪಯ}}.$$

$$\text{೯. } \frac{\text{ಅಪಬ}}{\text{ಅಮಯ}} \times \frac{\text{ಅಮಯ}}{\text{ಅಪಬ}} \quad \text{೧೦. } \frac{\text{ಅತ}}{\text{ಅದ}} \times \frac{\text{ಅದ}}{\text{ಅನ}} \times \frac{\text{ಗಂನ}}{\text{ತದ}}.$$

$$೧೧. \frac{೨ಪಿ}{೩ಬಿ} \times \frac{೪ಬಿ}{೫ಮಿ} \times \frac{೬ಮಿ}{೭ಪಿ}. \quad ೧೨. \frac{೮ಪಿ}{೯ಬಿ} \times \frac{೧೦ಬಿ}{೧೧ಮಿ} \times \frac{೧೨ಮಿ}{೧೩ಪಿ}.$$

$$೧೩. \frac{೧೪ಪಿ}{೧೫ಕ} \times \frac{೧೬ಕ}{೧೭ಗಿ} \times \frac{೧೮ಗಿ}{೧೯ಫಿ} \times \frac{೨೦ಫಿ}{೨೧ಫಿ}$$

$$೧೪. \frac{೨೨ಫಿ}{೨೩ಬಿ} \times \frac{೨೪ಬಿ}{೨೫ಮಿ} \times \frac{೨೬ಮಿ}{೨೭ಪಿ} \times \frac{೨೮ಪಿ}{೨೯ಫಿ}.$$

$$೧೫. \frac{೩೦ಪಿ-೩೧ಬಿ}{೩೨ಯಿ-೩೩ರ} \times \frac{೩೪ಯಿ-೩೫ರ}{೩೬ಪಿ-೩೭ಬಿ}. \quad ೧೬. \frac{೩೮ಯಿ+೩೯ರ}{೪೦ಪಿ+೪೧ಸ} \times \frac{೪೨ಯಿ-೪೩ರ}{೪೪ಪಿ-೪೫ಸ}.$$

$$೧೭. \frac{೪೬ಯಿ+೪೭ರ+೪೮ಪಿ}{೪೯ಲಿ-೫೦ವಿ} \times \frac{೫೨ಲಿ-೫೩ವಿ+೫೪ಮಿ}{೫೫ಯಿ-೫೬ರ}.$$

$$೧೮. \frac{೫೮ಪಿ+೫೯ಬಿ+೬೦ಮಿ}{೬೧ಫಿ-೬೨ಬಿ+೬೩ಮಿ} \times \frac{೬೪ಫಿ+೬೫ಮಿ}{೬೬ಪಿ-೬೭ಬಿ}. \quad ೧೯. \frac{೬೮ಲಿ-೬೯ಫಿ+೭೦ಗಿ}{೭೧ಕಿ+೭೨ಕಿ+೭೩ಗಿ} \times \frac{೭೪ಕಿ+೭೫ಗಿ}{೭೬ಲಿ-೭೭ಫಿ}$$

$$೨೦. \frac{೭೮ಪಿ-೭೯ಮಿ}{೮೦ಬಿ-೮೧ಫಿ} \times \frac{೮೨ಬಿ-೮೩ಫಿ}{೮೪ಪಿ+೮೫ಮಿ}.$$

$$೨೧. \frac{೮೬ಫಿ+೮೭ರ}{೮೮ಪಿ-೮೯ಫಿ} \times \frac{೯೦ಪಿ-೯೧ಮಿ}{೯೨ಯಿ-೯೩ರ}.$$

$$೨೨. \frac{೯೪ಪಿ+೯೫ಕಿ}{೯೬ಗಿ-೯೭ಕಿ} \times \frac{೯೮ಫಿ-೯೯ಫಿ}{೧೦೦ಪಿ+೧೦೧ಮಿ}.$$

$$೨೩. \frac{೧೦೨ಕಿ-೧೦೩ಗಿ}{೧೦೪ಪಿ-೧೦೫ಕಿ} \times \frac{೧೦೬ಪಿ-೧೦೭ಕಿ}{೧೦೮ಫಿ-೧೦೯ಗಿ}.$$

$$೨೪. \frac{೧೧೦ಕಿ+೧೧೧ಪಿ}{೧೧೨ಗಿ-೧೧೩ಕಿ} \times \frac{೧೧೪ಕಿ+೧೧೫ಮಿ}{೧೧೬ಫಿ-೧೧೭ಕಿ}.$$

$$೨೫. \frac{೧೧೮ಬಿ}{೧೧೯ಕಿ+೧೨೦ಕಿ+೧೨೧ಗಿ} \times \frac{೧೨೨ಕಿ+೧೨೩ಪಿ}{೧೨೪ಫಿ-೧೨೫ಬಿ}.$$

$$೨೬. \frac{೧೨೬ಪಿ-೧೨೭ಮಿ}{೧೨೮ಯಿ-೧೨೯ಮಿ+೧೩೦ವಿ} \times \frac{೧೩೨ಫಿ+೧೩೩ಮಿ}{೧೩೪ಪಿ+೧೩೫ಮಿ+೧೩೬ಮಿ}.$$

$$೨೭. \frac{೧೩೮ಯಿ+೧೩೯ಫಿ}{೧೪೦ಯಿ+೧೪೧ಕಿ+೧೪೨ಗಿ} \times \frac{೧೪೪ಯಿ+೧೪೫ಫಿ}{೧೪೬ಯಿ+೧೪೭ಕಿ+೧೪೮ಗಿ}.$$

$$೨೮. \frac{\text{ಓಪತಿ}+\text{ಗೌಪತಿ}}{\text{ಗೌಪತಿ}+\text{ಗೌಪತಿ}} \times \frac{\text{ಓಪತಿ}+\text{ಓಪತಿ}}{\text{ಓಪತಿ}-\text{ಓಪತಿ}-೨೭}$$

$$೨೯. \frac{\text{ಓಯತಿ}-\text{ಓಯರ}-\text{ಫರತಿ}}{\text{ಗೌಯತಿ}-\text{ಗೌಯರ}-\text{ಗೌರತಿ}} \times \frac{\text{ಓಯತಿ}-\text{ಓಯರ}+\text{ಓಗೌರತಿ}}{\text{ಗೌಯತಿ}-\text{ಓಯರ}-\text{ಓರತಿ}}$$

$$೩೦. \frac{\text{ಓಪತಿ}+\text{ಗೌಪತಿ}-\text{ಓಗೌಮತಿ}}{\text{ಗೌಪತಿ}-\text{ಓಪತಿ}-\text{ಓಗೌಮತಿ}} \times \frac{\text{ಓಪತಿ}+\text{ಓಪತಿ}-\text{ಫಮತಿ}}{\text{ಗೌಪತಿ}+\text{ಫಓಪತಿ}-\text{ಗೌಮತಿ}}$$

$$೩೧. \frac{\text{ಓನತಿ}+\text{ಓಘನತಿ}+\text{ಓಘ}}{\text{ಓನತಿ}+\text{ಗೌಘನತಿ}+\text{ಓಘ}} \times \frac{\text{ಓನತಿ}+\text{ಗೌಘನತಿ}+\text{ಫಘ}}{\text{ಓನತಿ}+\text{ಓಘನತಿ}+\text{ಫಘ}}$$

$$೩೨. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘ}}$$

$$\frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಗೌಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಫಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$೩೩. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಗೌಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$೩೪. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$೩೫. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$೩೬. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$೩೭. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$೩೮. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$\times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}$$

$$೩೯. \frac{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}} \times \frac{\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}+\text{ಓಘಯತಿ}}{\text{ಓಘಯತಿ}-\text{ಓಘಯತಿ}}$$

೩.

ಭಾಗಾಕಾರ.

೧೦.೮. ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದು ಅಂದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದಿಂದ ಗುಣಿಸುವಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೧೨}{೨}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದೆಂದರೆ ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವಂತೆಯೇ ಸರಿ, ಇಲ್ಲವೆ $\frac{೧೨}{೩}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದೆಂದರೆ ೪ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವಂತೆಯೇ ಸರಿ.

$$\frac{೧೨}{೨} \div \frac{೧೨}{೨} = \frac{೧೨}{೨} \times \frac{೨}{೧೨} = \frac{೨೪}{೨೪}, \frac{೧೨}{೩} \div \frac{೧೨}{೩} = \frac{೧೨}{೩} \times \frac{೩}{೧೨} = \frac{೩೬}{೩೬}.$$

ಇದರಂತೆಯೇ $\frac{೮}{೪} \div \frac{೮}{೮} = \frac{೮}{೪} \times \frac{೮}{೮} = \frac{೬೪}{೬೪}$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ವಿರುತ್ತದೆ. $\frac{೮}{೪} \div \frac{೮}{೮}$ ಎಂದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $\frac{೮}{೮}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ

ಉತ್ತರವು $\frac{೮}{೪}$ ಬರುವದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಈಗ $\frac{೮}{೪} \times \frac{೮}{೮}$ ಎಂದರೆ

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $\frac{೮}{೮}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರವು $\frac{೮}{೪}$ ಬರುವದೋ

ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮುಂದಿನಂತೆಯೂ ಮಾಡಬಹುದು. $೧ \div \frac{೧}{೨}$ ಅಂದರೆ ೧ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ

$\frac{೧}{೨}$ ದಷ್ಟು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? ೧×೨ . ಮತ್ತು ೨ ರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು

ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? ೨×೨ . ಮತ್ತು ೪ ರಲ್ಲಿ ೪×೨ . ಆದರೆ ನಮ್ಮ

ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟು ಭಾಗವನ್ನು ಮಾಡುವದಿರದೆ ಅದರ ಇಮ್ಮಡಿ ಅಂದರೆ

$\frac{೧}{೨}$ ದಷ್ಟು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುವದು. ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೧}{೨} \times \frac{೧}{೨}$, $\frac{೨}{೨} \times \frac{೧}{೨}$, $\frac{೩}{೨} \times \frac{೧}{೨}$ ಇಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? ಅಂದರೆಯೇ $೧ \div \frac{೧}{೨} = ೧ \times ೨$;

$೨ \div \frac{೧}{೨} = ೨ \times ೨$; $೩ \div \frac{೧}{೨} = ೩ \times ೨$. ಅದರಂತೆಯೇ $೧ \div \frac{೧}{೩}$ ಅಂದರೆ ೧ ಈ

ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $\frac{೧}{೩}$ ದಷ್ಟು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? ೧×೩ ಮತ್ತು ೨ ಈ

ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨ ಮ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅನು ಮತ್ತು $\frac{೨}{೪}$ ದಲ್ಲಿ $\frac{೨}{೪}$.

ಅದರೆ ಭಾಗವು $\frac{೧}{ಮ}$ ದಷ್ಟು ಇರದೆ $\frac{ಪ}{ಮ}$ ದಷ್ಟು ಅಂದರೆ ಅದರ ಪ ಪಟ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? $\frac{ಅಮ}{ಕ} \div \frac{ಪ}{ಮ}$ ಅಂದರೆ $\frac{ಅಮ}{ಕಪ}$.

ಆದುದರಿಂದ $\frac{ಅ}{ಕ} \div \frac{ಪ}{ಮ} = \frac{ಅ}{ಕ} \times \frac{ಮ}{ಪ}$.

ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೀಗೆ ಸಹ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು. $\frac{ಅ}{ಕ}$ ಕ್ಕೆ ಪ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು $\frac{ಅ}{ಕಪ}$ ಬರುವದು. ಅದರೆ ನಮಗೆ ಪ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿರದೆ ಪದಲ್ಲಿಯ ಮ ಭಾಗದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಭಾಗಾಕಾರವು $\frac{ಅ}{ಕಪ}$ ದ ಮ ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅಂದರೆ $\frac{ಅಮ}{ಕಪ}$ ಬರುವದು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಯಾವುದೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಕೆಳಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಯಾವದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ತಿರುವಿ ಇಟ್ಟು, ಅಂದರೆ ಅಂಶದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಛೇದವನ್ನು ಮತ್ತು ಛೇದದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು ಬರೆದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಮೊದಲನೆಯದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವು ಇರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೫}{೧೨}$, $\frac{೫}{೧೨}$ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೫}{೧೨}$, $\frac{೫}{೧೨}$, $\frac{೫}{೧೨}$ ಯ ಇವುಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ೧ ಇರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಉ. ೧. } \frac{೪ಪಮ}{೨ಅಕ} \div \frac{೮ಪಮ}{೯ಅಕ} = \frac{೪ಪಮ}{೨ಅಕ} \times \frac{೯ಅಕ}{೮ಪಮ} = \frac{೩೬}{೧೬} = \frac{೯}{೪}$$

$$\text{ಉ. ೨. } \frac{೫೦ಪ - ೯೮ಮ}{೨೫ಪ + ೨೪ಪಮ + ೪೮ಮ} \div \frac{೨೫ಪ - ೨೦ಪಮ + ೪೮ಮ}{೧೦ಪ + ೨೫ಪಮ - ೫೬ಮ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{ಚಿಪ್ಪು} - \text{ಫಲಮು}}{\text{ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಪಮು} + \text{ಅಳಮು}} \times \frac{\text{ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಪಮು} - \text{ಚಿಪ್ಪು}}{\text{ಚಿಪ್ಪು} - \text{ಅಳಪಮು} + \text{ಅಳಮು}} \\
 &= \frac{\text{ಅ(ಚಿಪ್ಪು} - \text{ಅಳಮು)}}{\text{ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಪಮು} + \text{ಚಿಪ್ಪು}} \times \frac{\text{ಅ(ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಪಮು} - \text{ಅಳಮು)}}{\text{ಚಿಪ್ಪು} - \text{ಅಳಪಮು} + \text{ಅಳಮು}} \\
 &= \frac{\text{ಅ(ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಮು)}(\text{ಚಿಪ್ಪು} - \text{ಅಳಮು})}{\text{ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಮು}} \times \frac{\text{ಅ(ಚಿಪ್ಪು} - \text{ಅಳಮು)}(\text{ಅಳಮು})}{(\text{ಚಿಪ್ಪು} - \text{ಅಳಮು})} \\
 &= \frac{\text{ಅ(ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಮು})}{\text{ಚಿಪ್ಪು} + \text{ಅಳಮು}}
 \end{aligned}$$

ಉ. ೩. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಗವಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಳವಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳವಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳಪಯಳಿ} + \text{ಅಗವಳಿ}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಗವಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಳವಳಿ}} \times \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳಪಯಳಿ} + \text{ಅಗವಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳವಳಿ}} \\
 &= \frac{(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳವಳಿ})(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಳವಳಿ})}{(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಳವಳಿ})(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳಪಯಳಿ} + \text{ಅಗವಳಿ})} \\
 &\quad \times \frac{(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳಪಯಳಿ} + \text{ಅಗವಳಿ})(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಳಪಯಳಿ} - \text{ಅಗವಳಿ})}{(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಳವಳಿ})(\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} - \text{ಅಳಪಯಳಿ} - \text{ಅಗವಳಿ})} \\
 &= \text{ಅಚ್ಚಯಳಿ} + \text{ಅಳವಳಿ}.
 \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿ:

- | | |
|---|---|
| ೧. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಳವಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಳವಳಿ}}$ | ೨. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಳವಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಳವಳಿ}}$ |
| ೩. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}$ | ೪. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}$ |
| ೫. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}$ | ೬. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}$ |
| ೭. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}$ | ೮. $\frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}} \div \frac{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}{\text{ಅಚ್ಚಯಳಿ}}$ |

೯. $\frac{\text{ಗೃತಿಯ-ಅಳತವ}}{\text{ಋತಯ-ಅಳಕವ}} \div \frac{\text{ಲಯ-ಗೃತವ}}{\text{ಅಯ-ಗೃತವ}}$
೧೦. $\frac{\text{ಗಂಯ-ಅಜಯವ}}{\text{ಅಯವ+ಅವ}} \div \frac{\text{ಋಯ-ಅಂಯವ}}{\text{ಅಯವ+ಅವ}}$
೧೧. $\frac{\text{ಪ-ಅಜಬ}}{\text{ಗೃಪ-ಅಜಮ}} \div \frac{\text{ಅಪ+ಗಂಪಬ}}{\text{ಲಪಮ-ಗಂಮ}}$
೧೨. $\frac{\text{ಅಯ-೯ರ}}{\text{ಅಯ-ಗೃಯರ+೯ರ}} \div \frac{\text{ಅಯ+ಗೃಯರ+೯ರ}}{\text{ಅಯ-ಅಯರ-೩ರ}}$
೧೩. $\frac{\text{ಗೃಪ-ಅಪರ+ಅಗರ}}{\text{ಲಪ+ಗೃಪರ+೯ರ}} \div \frac{\text{ಲಪ-ಅಪರ+ಗೃರ}}{\text{ಗೃಪ+೯ರ}}$
೧೪. $\frac{\text{ಯ-ಅಲ}}{\text{ಯ-ಅಲ}} \div \frac{\text{ಯ-೯ಲ}}{\text{ಯ-ಗೃಲ}}$
೧೫. $\frac{\text{ಅಪ-ಅಪಮ+ಗೃಮ}}{\text{ಪ-ಗೃಪಮ+ಅಮ}} \div \frac{\text{ಪ-ಅಮ}}{\text{ಪ+ಗೃಪಮ+ಅಮ}}$
೧೬. $\frac{\text{ಅಯ-ಅಯ+೩}}{\text{ಅಯ-ಅಯ-೩}} \div \frac{\text{ಗೃಯ+ಅಯ-೩}}{\text{ಗೃಯ-ಅಯ-೩}}$
೧೭. $\frac{\text{ಗೃಪ+ಗೃಪ-೩}}{\text{ಗೃಪ+ಅಪ-೩}} \div \frac{\text{ಅಪ+ಅಪ-೩}}{\text{ಅಪ-ಗೃಪ+೩}}$
೧೮. $\frac{\text{೯ಯ-ಗೃವ}}{\text{೯ಯ+ಅಯ+ವ+ಗೃವ}} \div \frac{\text{೯ಯ-ಅಯ+ವ+ಗೃವ}}{\text{ಗೃಯ+ಅಯ+ವ}}$
೧೯. $\frac{\text{ಅಪ+ಅಪ+ಅಮ+ಲಕಮ}}{\text{ಲಪ+ಅಪ+ಅಪ+ಅಮ}} \div \frac{\text{ಅಪ-ಅಮ}}{\text{ಅಪ-ಅಮ+ಅಪ-ಲಕಮ}}$
೨೦. $\frac{\text{ಲಪ-ಗೃಮ}}{\text{ಅಪ-ಅಪಮ-ಮ}} \div \frac{\text{ಗೃಪ-ಗಂಮ}}{\text{ಲಪ-ಗೃಪಮ-ಅಮ}}$
೨೧. $\frac{\text{೯ಯ+ಅಯರ-೨ರ}}{\text{ಗೃಯ+ಯರ-೨ರ}} \div \frac{\text{ಗೃಯ+ಅಯರ-೨ರ}}{\text{ಗೃಯ+೯ಯರ+೨ರ}}$
೨೨. $\frac{\text{ಲಪ-ಅಪ+ಅಲ}}{\text{೯ಯ-ಅಪ+ಗೃ}} \div \frac{\text{ಲಪ-ಅಪ+ಗೃ}}{\text{೯ಯ-೯}}$

$$೨೩. \frac{೨ಪಯಃ-೧೪ಪಯಃ+೨೪ಪ}{೪ಮಯಃ-೧೨ಮಯಃ-೧೬ಮ} \div \frac{೩ಗಯಃ-೩ಗಯಃ-೧೪ಗ}{೯ನಯಃ+೨೭ನಯಃ+೧೮ನ}$$

$$೨೪. \frac{೪ರಃ-೪೦ರಃ+೬೪ರ}{೩ರಃ+೧೫ರಃ-೪೨ರ} \div \frac{೨ರಃ-೨೪ರಃ+೬೪ರ}{೩ರಃ+೨೪ರಃ+೨೧ರ}$$

$$೨೫. \frac{೮ಮಃ-೨೭}{೪ಮಃ+೧೨ಮಃ+೯} \div \frac{೧೬ಮಃ+೩೬ಮಃ+೮೧}{೮ಮಃ+೨೭}$$

೪.

ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ

೧೦.೯. $\frac{೭}{೧೨} + \frac{೪}{೧೨}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು $\frac{೭+೪}{೧೨}$ ಅಂದರೆ $\frac{೧೧}{೧೨}$ ಎಂದು, ಮತ್ತು $\frac{೭}{೧೨} - \frac{೪}{೧೨}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು $\frac{೭-೪}{೧೨}$ ಅಂದರೆ $\frac{೩}{೧೨}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರಂತೆಯೇ $\frac{೮}{೧೨} + \frac{೯}{೧೨}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು $\frac{೮+೯}{೧೨}$ ಎಂದು ಮತ್ತು $\frac{೮}{೧೨} - \frac{೯}{೧೨}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು $\frac{೮-೯}{೧೨}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುವೆವು. ಮತ್ತು $\frac{೮}{೨೭} + \frac{೯}{೨೭}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು $\frac{೮+೯}{೨೭}$ ಎಂದು ಮತ್ತು $\frac{೮}{೨೭} - \frac{೯}{೨೭}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು $\frac{೮-೯}{೨೭}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸಹಜಸಿದ್ಧವಿರುವದು. ೧ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೧೨ ಸರಿಯಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದರೆ $\frac{೧೨}{೧೨}$ ಮತ್ತು ೨ ಸರಿಯಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದರೆ $\frac{೧೨}{೨೭}$. ಈ ೨ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ೮ ಭಾಗಗಳೆಂದರೆ $\frac{೮}{೨೭}$, ಮತ್ತು ೯ ಭಾಗಗಳೆಂದರೆ $\frac{೯}{೨೭}$. ಈಗ ೮ ಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು ೯ ಭಾಗಗಳು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು $\frac{೮+೯}{೨೭}$, ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ $\frac{೮-೯}{೨೭}$ ಭಾಗಗಳು ಅಂದರೆ $\frac{೮-೯}{೨೭}$.

ಇದರಂತೆಯೇ $\frac{೧}{೯} + \frac{೧}{೯} + \frac{೧}{೯} = \frac{೩+೩+೩}{೯} = \frac{೯}{೯}$; $\frac{೧}{೯} + \frac{೧}{೯} - \frac{೧}{೯} = \frac{೩+೩-೩}{೯} = \frac{೩}{೯}$;

$$\frac{ಅ}{ಪ} + \frac{ಕ}{ಪ} + \frac{ದ}{ಪ} = \frac{ಅ+ಕ+ದ}{ಪ}; \quad \frac{ಅ}{ಪ} + \frac{ಕ}{ಪ} - \frac{ದ}{ಪ} = \frac{ಅ+ಕ-ದ}{ಪ}.$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡುವುದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಮಚ್ಛೇದ (ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯುಳ್ಳವು) ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\frac{೧}{೯} + \frac{೧}{೯}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು ಅಥವಾ $\frac{೧}{೯} - \frac{೧}{೯}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? ಮೊದಲು ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಮಚ್ಛೇದವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. $\frac{೧}{೯}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{೯}$ ಇವುಗಳ ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ೪ ಮತ್ತು ೩ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೧೨ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದು ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ. $\frac{೧}{೯}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{೯}$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಿರುವ ಮತ್ತು ಭೇದವು ೧೨ ಇರುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆಯೇ $\frac{೧}{೯}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{೯}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅನುಕೂಲವಿರುವ (ಸಮಚ್ಛೇದ) ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{೧}{೯} = \frac{೩ \times ೩}{೪ \times ೩} = \frac{೯}{೧೨}; \quad \frac{೧}{೯} = \frac{೨ \times ೪}{೩ \times ೪} = \frac{೮}{೧೨}.$$

$$\therefore \frac{೧}{೯} + \frac{೧}{೯} = \frac{೯}{೧೨} + \frac{೮}{೧೨} = \frac{೯+೮}{೧೨} = \frac{೧೭}{೧೨} \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\frac{೧}{೯} - \frac{೧}{೯} = \frac{೯}{೧೨} - \frac{೮}{೧೨} = \frac{೯-೮}{೧೨} = \frac{೧}{೧೨}.$$

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ. ೧೦.೨ ರಲ್ಲಿ ವಿಶದಪಡಿಸಿದ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ಅದೇ ಇರುತ್ತದೆ, ಕೇವಲ ಸ್ವರೂಪವು ಬದಲಿಸುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯ ಸಹಾಯವನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

೧೦.೧೦. ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ

ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಥವಾ ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರಬೇಕಾದರೆ ನಮಗೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಚ್ಛೇದರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\frac{ಯ}{೪}, \frac{ರ}{೫}$ ಈ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೨೦.

ಆದುದರಿಂದ ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ೨೦. $\frac{ಯ}{೪} = \frac{ಯ \times ೫}{೪ \times ೫} = \frac{೫ಯ}{೨೦}$;
 $\frac{ರ}{೫} = \frac{ರ \times ೪}{೫ \times ೪} = \frac{೪ರ}{೨೦}$.

ಭೇದವು ೨೦ ಬರಲು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದಗಳಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ೫ರಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ೨. $\frac{ಯ}{೬}, \frac{೨ರ}{೯}, \frac{೩ವ}{೮}$. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ೭೨ ಇರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ $\frac{ಯ}{೬} = \frac{ಯ \times ೧೨}{೬ \times ೧೨} = \frac{೧೨ಯ}{೭೨}$;
 $\frac{೨ರ}{೯} = \frac{೨ರ \times ೮}{೯ \times ೮} = \frac{೧೬ರ}{೭೨}$;
 $\frac{೩ವ}{೮} = \frac{೩ವ \times ೯}{೮ \times ೯} = \frac{೨೭ವ}{೭೨}$.

ಉ. ೩. $\frac{ಯ}{೮}, \frac{ರ}{೭}, \frac{ಲ}{೬}$. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಪಬಮ ಇದು ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{ಯ}{೮} = \frac{ಯ \times ೭}{೮ \times ೭} = \frac{೭ಯ}{೫೬}$;
 $\frac{ರ}{೭} = \frac{ರ \times ೮}{೭ \times ೮} = \frac{೮ರ}{೫೬}$;
 $\frac{ಲ}{೬} = \frac{ಲ \times ೭}{೬ \times ೭} = \frac{೭ಲ}{೪೨}$.

ಉ. ೪. $\frac{೨ಯ}{೭}, \frac{೩ರ}{೮}, \frac{೫ಸ}{೬}$. ಪಬಮ ಇದು ಲಘುತ್ತಮ ಸಮ-

ಚ್ಛೇದವು. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{ಅಯ}{ಬಮ} = \frac{ಅಯ \times ಸ}{ಬಮ \times ಸ} = \frac{ಅಸಯ}{ಪಬಮ}$; $\frac{ಇರ}{ಪಮ} = \frac{ಇರ \times ಬ}{ಪಮ \times ಬ}$
 $= \frac{ಇಬರ}{ಪಬಮ}$; $\frac{ಇಸ}{ಪಬ} = \frac{ಇಸ \times ಮ}{ಪಬ \times ಮ} = \frac{ಇಮಸ}{ಪಬಮ}$.

ಉ. ೫. $\frac{ಅಯ}{ಇಸ}$, $\frac{ಇರ}{ಗಜಬ}$, $\frac{ಇನ}{ಅಮ}$. ಇಲ್ಲಿ ೬೦ ಪಬಮ ಇದು ಲಘುತ್ತಮ

ಸಮಚ್ಛೇದವು. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{ಅಯ}{ಇಸ} = \frac{ಅಯ \times ೧೨ಬಮ}{ಇಸ \times ೧೨ಬಮ} = \frac{೯೬ಬಮಯ}{೬೦ಪಬಮ}$;
 $\frac{ಇರ}{ಗಜಬ} = \frac{ಇರ \times ಅಸಮ}{ಗಜಬ \times ಅಸಮ} = \frac{೧೬ಸಮರ}{೬೦ಪಬಮ}$; $\frac{ಇನ}{ಅಮ} = \frac{ಇನ \times ಇಪಬ}{ಅಮ \times ಇಪಬ} = \frac{೯ಪಬನ}{೬೦ಪಬಮ}$.

ಉ. ೬. $\frac{ಯ}{ಅ}$, $\frac{ರ}{ಕ}$, $\frac{ಲ}{ಅ+ಕ}$, $\frac{ನ}{ಅ-ಕ}$, $\frac{ಸ}{ಅ-ಕ}$. ಇಲ್ಲಿ ಅಕ(ಅ-ಕ)

ಇದು ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದವು. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{ಯ}{ಅ} = \frac{ಯಕ(ಅ-ಕ)}{ಅಕ(ಅ-ಕ)}$;

$\frac{ರ}{ಕ} = \frac{ರಅ(ಅ-ಕ)}{ಅಕ(ಅ-ಕ)}$; $\frac{ಲ}{ಅ+ಕ} = \frac{ಲಅಕ(ಅ-ಕ)}{ಅಕ(ಅ-ಕ)}$; $\frac{ನ}{ಅ-ಕ} = \frac{ನಅಕ(ಅ+ಕ)}{ಅಕ(ಅ-ಕ)}$;

$\frac{ಸ}{ಅ-ಕ} = \frac{ಅಕಸ}{ಅಕ(ಅ-ಕ)}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೯.

ಲಘುತ್ತಮಸಮಚ್ಛೇದರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ. ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸ-
ತಕ್ಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. $\frac{ಜಯ}{ಅ}$, $\frac{ಇರ}{ಅ}$.

೨. $\frac{ಅಯ}{೯}$, $\frac{ಅಯ}{೪}$.

೩. $\frac{ಅರ}{೫}$, $\frac{ಅರ}{೩}$.

೪. $\frac{ಅರ}{೯}$, $\frac{ಅಸ}{೧೫}$.

೫. $\frac{ಅಲ}{೭}$, $\frac{ಇನ}{೬}$.

೬. $\frac{ಇಯ}{೪}$, $\frac{ಇರ}{೬}$, $\frac{ಇನ}{೩}$.

೭. $\frac{ಅಅ}{೫}$, $\frac{ಇಇ}{೧೦}$, $\frac{ಅಕ}{೧೫}$.

೮. $\frac{೯ಪ}{೧೦}$, $\frac{೭ಬ}{೨೦}$, $\frac{ಇಮ}{೬}$.

೯. $\frac{ಅತ}{೭}$, $\frac{ಅದ}{೨೧}$, $\frac{ಅನ}{೧೫}$.

೧೦. $\frac{೨ಯ}{ಪ}, \frac{೭ನ}{ಮ}$. ೧೧. $\frac{೪ಯ}{ಫ}, \frac{೩ನ}{ಮ}$. ೧೨. $\frac{೮ಯ}{ಪ}, \frac{೫ನ}{ಬ}$.
೧೩. $\frac{೪ಪ}{೩ಅ}, \frac{೩ಮ}{೫ಕ}$. ೧೪. $\frac{೨ಬ}{೭ಕ}, \frac{೫ಮ}{೨ಗ}$. ೧೫. $\frac{೪ಕ}{ಪ}, \frac{೫ಗ}{ಬ}, \frac{೭ಫ}{ಮ}$.
೧೬. $\frac{೩ಯ}{ಬಮ}, \frac{೮ರ}{ಪಮ}, \frac{೯ಲ}{೪ಪ}$. ೧೭. $\frac{೯ಯ}{೪ಪ}, \frac{೩ರ}{೧೦ಬ}, \frac{೪ಲ}{೩ಮ}$.
೧೮. $\frac{೨ಅ}{೩ಬಮ}, \frac{೩ಕ}{೪ಪಮ}, \frac{೪ಗ}{೫ಪಬ}$. ೧೯. $\frac{೧}{ಯ+೧}, \frac{೧}{ಯ-೧}$.
೨೦. $\frac{೪}{ರ+೪}, \frac{೬}{ರ-೪}$. ೨೧. $\frac{೮}{ಯ+೫}, \frac{೩}{ಯ+೧೦ಯ+೨೫}$.
೨೨. $\frac{೭}{ಯ+೮}, \frac{೧೦}{ಯ-೮}$. ೨೩. $\frac{೯}{ಯ+೨೫ಯ+೮೮}, \frac{೩ಕ}{ಯ-೮}$.
೨೪. $\frac{೫ಪ}{ಯ-೨೫ನ+೮}, \frac{೬ಪ}{ಯ-೮}$.
೨೫. $\frac{೮}{೫ಯ+೭೮}, \frac{೩೮}{೨೫ಯ-೪೯೮}$.
೨೬. $\frac{೪೮}{೩ಪ-ಮ}, \frac{೨೮}{೯ಪ-ಮ}, \frac{೮೮೩}{೨೭ಪ೩-ಮ೩}$.
೨೭. $\frac{೮ಕ}{೨ಪ+೫ಮ}, \frac{೪ಕ}{೪ಪ+೨೦ಪಮ+೨೫ಮ}, \frac{೮ಪ೩+೧೨೫ಮ೩}{೮ಪ೩+೧೨೫ಮ೩}$.
೨೮. $\frac{೮}{ಯ+೯ಯ+೨೦}, \frac{೮}{ಯ+೭ಯ+೧೨}$.
೨೯. $\frac{೩ಯ}{೨ಯ+೨ಯ-೧೨}, \frac{೨ಯ}{೩ಯ-೩ಯ-೩೬}, \frac{೮ಯ}{೬ಯ-೩೬ಯ+೪೮}$.
೩೦. $\frac{೨ಯ}{೮ಯ-೬ಯನ-೩೫ನ}, \frac{೩ಯನ}{೧೬ಯ-೪೯ನ}$.

೮

೮ಯ-೩೪ಯನ+೩೫ನ

{ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ವಜ್ರಭ್ಯಾಸದಿಂದ (ತಿರುವ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವದರಿಂದ) ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅವಶ್ಯವೆನಿಸಿದರೆ ವಜ್ರಭ್ಯಾಸದಿಂದ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ ಯ ಅಯ ಈ ಸಮಾನವಾದ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ವಜ್ರಗುಣನದಿಂದ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸಮಾನವಿರುವದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ಸಮಾನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸಹ ಇದೇ ಕಂಡುಬರುವದು. ಕಾರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

೧೦.೧೧. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದು ತಿಳಿದನಂತರ ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಥವಾ ವಜ್ರಾಂಕಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದರೆ ತಿಳಿಯುವದು.

ಉ. ೧. $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$. ಇಲ್ಲಿ ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದ ೫, ಮತ್ತು $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

$$\therefore \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{8}{10} + \frac{4}{15} = \frac{8+4}{15} = \frac{12}{15}$$

ಉ. ೨. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. ಇಲ್ಲಿ ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದ ೧೨ ಮತ್ತು

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{1}{2} = \frac{6}{12}, \text{ ಮತ್ತು } \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{9}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} + \frac{4}{12} \\ &= \frac{9+10+4}{12} = \frac{23}{12} \\ &= \frac{1\frac{11}{12}}{12} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

ಉ. ೩. $\frac{ಪ}{ಪ+ಮ} + \frac{ಮ}{ಪ-ಮ}$. $(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)$ ಇದು ಲ. ಸಮ-

ಚ್ಛೇದವು. ಆದುದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} \frac{ಪ}{ಪ+ಮ} + \frac{ಮ}{ಪ-ಮ} &= \frac{ಪ(ಪ-ಮ)}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} + \frac{ಮ(ಪ+ಮ)*}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} \\ &= \frac{ಪ(ಪ-ಮ)+ಮ(ಪ+ಮ)}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} \\ &= \frac{ಪ^2-ಪಮ+ಪಮ+ಮ^2}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} \\ &= \frac{ಪ^2+ಮ^2}{ಪ^2-ಮ^2}. \end{aligned}$$

ಉ. ೪. $\frac{ಯ-ವ}{ಯ+ವ} + \frac{ಯ+ವ}{ಯ-ವ} - \frac{ಯ^2+ವ^2}{ಯ^2-ವ^2}$. $(ಯ+ವ)(ಯ-ವ)$ ಇದು

ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದವು. ಆದುದರಿಂದ,

$$\begin{aligned} \frac{ಯ-ವ}{ಯ+ವ} + \frac{ಯ+ವ}{ಯ-ವ} - \frac{ಯ^2+ವ^2}{ಯ^2-ವ^2} &= \frac{(ಯ-ವ)^2+(ಯ+ವ)^2-(ಯ^2+ವ^2)}{(ಯ+ವ)(ಯ-ವ)} \\ &= \frac{ಯ^2-೨ಯವ+ವ^2+ಯ^2+೨ಯವ+ವ^2-ಯ^2-ವ^2}{(ಯ+ವ)(ಯ-ವ)} \\ &= \frac{ಯ^2+ವ^2}{ಯ^2-ವ^2}. \end{aligned}$$

ಉ. ೫. $\frac{ಅರ-ಜಸ}{ಅರ+ಜಸ} + \frac{ಅರ+ಜಸ}{ಅರ-ಜಸ}$ $\frac{ಅರಸ}{ಅರ^2-ಅಜಸ^2}$
 $= \frac{(ಅರ-ಜಸ)^2+(ಅರ+ಜಸ)^2-ಅರಸ}{(ಅರ+ಜಸ)(ಅರ-ಜಸ)}$

$$= \frac{ಅರ^2-೨ಅರಜಸ+ಅಜಸ^2+ಅರ^2+೨ಅರಜಸ+ಅಜಸ^2-ಅರಸ}{(ಅರ+ಜಸ)(ಅರ-ಜಸ)}$$

$$= \frac{ಅರ^2-ಅರಸ+ಅಜಸ^2}{(ಅರ+ಜಸ)(ಅರ-ಜಸ)}$$

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಡಬಹುದು.

$$\begin{aligned}
&= \frac{೨(೪ರ^೨-೨೦ರಸ+೨೫ಸ^೨)}{(೨ರ+೫ಸ)(೨ರ-೫ಸ)} \\
&= \frac{೨(೨ರ-೫ಸ)^೨}{(೨ರ+೫ಸ)(೨ರ-೫ಸ)} \\
&= \frac{೨(೨ರ-೫ಸ)}{೨ರ+೫ಸ}
\end{aligned}$$

ಉ. ೬. $\frac{೨ಯ-೧}{೪ಯ+೩}$ $\frac{ಯ-೫}{೨ಯ-೩}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(೨ಯ-೧)(೨ಯ-೩)-(ಯ-೫)(೪ಯ+೩)}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)} \\
&= \frac{೪ಯ^೨-೮ಯ+೩-(೪ಯ^೨-೧೭ಯ-೧೫)}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)} \\
&= \frac{೪ಯ^೨-೮ಯ+೩-೪ಯ^೨+೧೭ಯ+೧೫}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)} \\
&= \frac{೯ಯ+೧೮}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)} \\
&= \frac{೯ಯ+೧೮}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)}
\end{aligned}$$

ಉ. ೭. $\frac{೬ಸ-೨}{೬ಸ^೨+೭ಸ-೩}$ $\frac{೬ಸ-೩}{೮ಸ^೨+೬ಸ-೫}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{೨(೩ಸ-೧)}{(೩ಸ-೧)(೨ಸ+೩)} - \frac{೩(೨ಸ-೧)}{(೨ಸ-೧)(೪ಸ+೫)} = \frac{೨}{೨ಸ+೩} - \frac{೩}{೪ಸ+೫} \\
&= \frac{೨(೪ಸ+೫)-೩(೨ಸ+೩)}{(೨ಸ+೩)(೪ಸ+೫)} \\
&= \frac{೮ಸ+೧೦-೬ಸ-೯}{(೨ಸ+೩)(೪ಸ+೫)} \\
&= \frac{೨ಸ+೧}{(೨ಸ+೩)(೪ಸ+೫)}
\end{aligned}$$

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ನಾವು ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಭೇದಗಳ ಗುಣಕೃತ್ಯರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದನ್ನು ಮಾಡಿದ ನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ

ಗುಣಕವು ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

$$\begin{aligned}
 & \text{ಉ. ಟ. } \frac{1}{x^2 - 10x + 9} - \frac{2}{x^2 + 4x - 5} \\
 & + \frac{3}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{(x-3)(x+2)} - \frac{2}{(x+2)(x-1)} \\
 & + \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{(x-1) - 2(x-3) + 3(x-1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} \\
 & = \frac{x-1-2x+6+3x-3}{(x-3)(x+2)(x-1)} \\
 & = \frac{2x+2}{(x-3)(x+2)(x-1)}
 \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸುಲಭ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರಬಹುದು.

- | | | |
|---|---|---|
| ೧. $\frac{ಪ}{೪} + \frac{ಪ}{೭}$ | ೨. $\frac{೩ಪ}{೫} + \frac{೪ಪ}{೯}$ | ೩. $\frac{೨ಯ}{೩} + \frac{೩ಯ}{೪}$ |
| ೪. $\frac{ರ}{೭} - \frac{ರ}{೮}$ | ೫. $\frac{೩ರ}{೧೪} - \frac{೨ರ}{೨೧}$ | ೬. $\frac{೨ಯ}{೫} + \frac{೩ಯ}{೧೦} + \frac{೭ಯ}{೧೫}$ |
| ೭. $\frac{೩ರ}{೪} + \frac{ರ}{೮} + \frac{೫ರ}{೧೨}$ | ೮. $\frac{೨ವ}{೯} + \frac{೫ವ}{೧೨} + \frac{೭ವ}{೧೮}$ | ೯. $\frac{೫ಯ}{೧೬} + \frac{೩ಯ}{೧೬} + \frac{೨ಯ}{೪}$ |
| ೧೦. $\frac{೩ಪ}{೫} - \frac{೪ಪ}{೯} + \frac{೨ಪ}{೧೫}$ | ೧೧. $\frac{೪}{ಪ} + \frac{೮}{೩ಪ}$ | ೧೨. $\frac{೯}{೪ಪ} - \frac{೭}{೬ಪ}$ |
| ೧೩. $\frac{೮}{೩ಪ} + \frac{೫}{೭ಪ} - \frac{೩}{೪ಕ}$ | ೧೪. $\frac{೨ಕ}{ಪಬ} + \frac{೩ಬಮ}{೩ಬಮ} - \frac{೪ಪಮ}{೪ಪಮ}$ | |
| ೧೫. $\frac{ಯ}{ರಲ} - \frac{ರ}{ಯಲ} + \frac{ಲ}{ಯರ}$ | ೧೬. $\frac{೪ಮ}{೩ಪಬ} - \frac{೩ಪ}{೨ಬಮ} + \frac{೫ಬ}{೬ಪಮ}$ | |
| ೧೭. $\frac{೧}{೨ಪ} + \frac{೧}{ಪಮ} + \frac{೧}{೨ಮ}$ | ೧೮. $\frac{೩}{೪ಕ} - \frac{೧}{ಕಗ} + \frac{೧}{೩ಗ}$ | |

$$೧೯. \frac{೧}{ಕ-ಗ} - \frac{೧}{ಕ+ಗ}.$$

$$೨೦. \frac{೪}{ಕ-ಗ} + \frac{೪}{ಕ+ಗ}.$$

$$೨೧. \frac{ಜಯ-೪ವ}{೩} + \frac{೮ಯ-೩ವ}{೪}.$$

$$೨೨. \frac{೪ಪ-೩}{೨} + \frac{೨ಪ-ಜಿ}{೩}.$$

$$೨೩. \frac{೬ಯ+೯}{ಜಿ} - \frac{೯ಯ-೨}{೧ಜಿ}.$$

$$೨೪. \frac{ಜಿವ-೮}{೨} - \frac{೪ವ-೭}{೮} + \frac{೩ವ+ಜಿ}{೧೨}.$$

$$೨೫. \frac{೧೬ಯ-೩ರ}{೮} - \frac{೧೨ಯ-೯ರ}{೨೦}.$$

$$೨೬. \frac{ಜಕ}{ಕ+ಗ} + \frac{ಜಗ}{ಕ-ಗ}.$$

$$೨೭. \frac{ಯ+ಕ್ಷ}{೩} - \frac{ಯ-ಕ್ಷ}{೬}.$$

$$೨೮. \frac{ಯ+ವ}{ಜಿಮ} + \frac{ಯ-ವ}{೧೦ಮ}.$$

$$೨೯. \frac{೨(ಕ+ಗ)}{ಗಘ} - \frac{೨(ಕ-ಗ)}{ಕಘ}.$$

$$೩೦. \frac{೪}{ಕ್ಷ+ಜಿ} + \frac{೩}{ಕ್ಷ-೨}.$$

$$೩೧. \frac{೯}{ಪ-೩} - \frac{೯}{ಪ+೩}. \quad ೩೨. \frac{೮}{ಯ-೩} \quad \frac{೭}{ಯ-ಜಿ} \quad \frac{೪}{೮-೨} \quad \frac{೧೬}{೮-೪}.$$

$$೩೩. \frac{೬ವ}{ವ೨+೩ವ} + \frac{೩೬}{ವ೨-೯}.$$

$$೩೪. \frac{ಯ+೪}{ಯ+೩} - \frac{ಯ+೭}{ಯ+೬}.$$

$$೩೫. \frac{೧}{ಯ+ಜಿ} + \frac{ಜಿ}{ಯ೨-೨ಜಿ}.$$

$$೩೬. \frac{೧}{ಮ-೧೨} \quad \frac{೧೨}{ಮ೨-೧೪೪}.$$

$$೩೭. \frac{೪ಯ೨+೧೨ಯ+೯}{೬ಯ೨+೧೩ಯ+೬} - \frac{೧೨ಯ೨-೫ಯ-೨}{೨೦ಯ೨+೧೩ಯ+೨}.$$

$$೩೮. \frac{೯ವ೨+೧೨ವಸ+೧೬ಸ೨}{೨೭ವ೩-೬೪ಸ೩} - \frac{೯ವ+೧೨ಸ}{೧೮ವ೨-೩೨ಸ೨}.$$

$$೪೦. \frac{೧}{೨ಯ೨-೫ಯ-೨ಜಿ} \quad \frac{೧}{೬ಯ೨+೧೭ಯ+ಜಿ} \quad \frac{೧}{೩ಯ೨-೧೪ಯ-೩}$$

$$೪೧. \frac{೨೦ನ೨-೨೯ನ+ಜಿ}{೧೨ನ೨-೩೧ನ+೨೦} - \frac{೪ನ೨-೧೬ನ+೧೫}{೬ನ೨-೧೭ನ+ಜಿ}.$$

$$೪೨. \frac{೧}{೨ಪ೨} + \frac{೩}{೪ಪ೨+೧೦ಪ} \quad \frac{೪}{೪ಪ೨-೨ಜಿ}$$

ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು).

$$\frac{ಕ}{ಪ} = \frac{ಪ}{ಲ}, \text{ ಇದ್ದರೆ } ಕಲ = ಪನ.$$

$$೧೧.೧. \quad \frac{ಕ}{ಪ} = \frac{ಪ}{ಲ}$$

$$\therefore \frac{ಕ}{ಪ} \times ನಲ = \frac{ಪ}{ಲ} \times ನಲ$$

$$\therefore ಕಲ = ಪನ.$$

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ತಿಳಿದುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ-
ಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದಾಗ, ಒಂದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ
ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಎರಡನೆಯದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು
ಮೊದಲನೆಯದರ ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ.
ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದಾಗ
ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ (ತಿರುವು ಮುರುವು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ-
ದರಿಂದ) ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆ. ಯಾವದೇ
ವ್ಯಕ್ತಿಸಂಖ್ಯಾನ್ವಿತ ಸಮಾನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡು ಈ
ಸಂಗತಿಯ ನಿಜತ್ವವನ್ನು ನಾವು ಮನಗಾಣಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆ-
ಗಾಗಿ $\frac{೪}{೫} = \frac{೮}{೧೦}$, $೪ \times ೨ = ೧೦ \div ೨ = ೫$.

ಸಮಾನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳ
ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು,
ಮತ್ತು ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
ಮಂಡಿಸುವದು, ಈ ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳು ನಿಜವಾಗಿ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತ-
ವೆಂಬ ಮಾತು ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡುಬರುವದು. ಈ
ಸಂಗತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ
ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ಭೇದವು ೪ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿರುವ ಒಂದು
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ-

ಯೊಂದನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ೨ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಅಂಶವು ಯ ಇದ್ದರೆ ಭೇದವು $ಯ + ೪$ ಇರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆಯೇ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಯ}{ಯ + ೪}$ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ

ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಆಗುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಯ + ೫}{ಯ + ೯}$ ಇರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{ಯ + ೫}{ಯ + ೯} = \frac{೨}{೩}$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $೩(ಯ + ೫) = ೨(ಯ + ೯)$

$$\therefore ೩ಯ + ೧೫ = ೨ಯ + ೧೮$$

$$\therefore ಯ = ೩.$$

\therefore ೨ ಇದು ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

$$[ತಾಳಿ: \frac{೩+೫}{೨+೫} = \frac{೮}{೭} = \frac{೨}{೩}.]$$

ಉ. ೨. ಅಂಶದ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ಭೇದವು ೧ ರಿಂದ ಕಡಿನು ಇರುವಂಥ ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯ ಅಂಶವನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಭೇದವನ್ನು ಎರಡುಪಟ್ಟು ಮಾಡಿ ಅದರೊಳಗಿಂದ ೧ ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಬರುವ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{೧}{೩}$ ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಅಂಶವು ಯ ಇದ್ದರೆ ಭೇದವು $೩ಯ - ೧$ ಇರುವುದು. ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಯ}{೩ಯ - ೧}$ ಇರುವುದು. ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಸಂಗತಿಯ

ಮೇಲಿಂದ $\frac{ಯ + ೭}{೨(೩ಯ - ೧) - ೧}$ ಇದು ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುವುದು.

$$\therefore \frac{ಯ + ೭}{೨(೩ಯ - ೧) - ೧} = \frac{೧}{೩}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $೨(೩ಯ - ೧) - ೧ = ೩(ಯ + ೭)$

$$\therefore ೬ಯ - ೨ - ೧ = ೩ಯ + ೨೧$$

$$\therefore ೩ಯ = ೨೨$$

$$\therefore ಯ = ೭.$$

∴ $\frac{1}{2}$ ಇದು ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

$$[\text{ತಾಳಿ: } \frac{1+2}{2 \times 2 - 1} = \frac{3}{3} = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}.]$$

ಉ. ೩. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೮ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ
ಭೇದವನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಕಡಿನೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{2}$
ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅಂಶವನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಕಡಿನೆ ಮಾಡಿ ಭೇದವನ್ನು
೯ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಅದರ ಅ
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{1}{2}$ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ,

$$\frac{8+1}{5-3} = \frac{9}{2} \text{ ಮತ್ತು } \frac{3-1}{9+1} = \frac{2}{10}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $8+1=9-3$ ಮತ್ತು $9-3=6$ ಮತ್ತು $3-1=2$
ಮತ್ತು ಸತ್ಯಾಂತರದಿಂದ $8-3=5$ (೧)

$$\text{ಮತ್ತು } 9-1=8 \text{ (೨)}$$

(೨)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $9-3=6$ (೧)

(೧)ರ ,, ,, ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $8-3=5$ (೨)

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ

$$9-3=6$$

$$\therefore 3 = 2.$$

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ $3 = 2$ ಇಡಲಾಗಿ, $8-3=5$.

$$\therefore 3 = 2 \text{ ಅಂದರೆ, } 3 = 2.$$

∴ $\frac{1}{2}$ ಇದು ಇಷ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

$$[\text{ತಾಳಿ: } \frac{2+1}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3; \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.]$$

ಉ. ೪. ಅಂಶದ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿಯೊಳಗಿಂದ ೫ ಮತ್ತು ಭೇದದ
ಇಮ್ಮಡಿಯೊಳಗಿಂದ ೧೨ ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{2}$ ಆಗುವ, ಮತ್ತು
ಅಂಶದ $\frac{1}{2}$ ದಿಂದ ೧ ನ್ನು ಕಳೆದು ಭೇದದ ಅರ್ಧದಲ್ಲಿ ೨ ನ್ನು ಕೂಡಿಸ-
ಲಾಗಿ ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{2}$ ಆಗುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

$$\text{ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು } \frac{1}{2} \text{ ಇದ್ದರೆ } \frac{2-5}{12-1} = \frac{1}{11} \text{ ಮತ್ತು } \frac{1-1}{2+1} = \frac{0}{3}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ ಗಜಯ-೨೫=೪೨-೨೪ ಮತ್ತು ಜಯ-೧೫=೨೪
ಮತ್ತು ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ಗಜಯ-೪೨= ೧....(೧)

ಮತ್ತು ಜಯ-೨= ೧೯....(೨)

(೨)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಗಜಯ-೩೨=೫೭....(೨ಅ)

(೨ಅ)ದೊಳಗಿಂದ (೧) ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ರ=೫೭.

(೨)ರಲ್ಲಿ ರ=೫೭ ಇಡಲಾಗಿ ಜಯ-೫೭=೧೯

∴ ಜಯ=೭೫ ಅಂದರೆ ಯ=೧೫.

∴ ೧೫ ಇದು ಇಷ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

[ತಾಳೆ: $\frac{೧೫ \times ೩ - ೫}{೫೭ \times ೨ - ೧೨} = \frac{೪೫ - ೫}{೧೧೨ - ೧೨} = \frac{೪೦}{೧೦೦} = \frac{೨}{೫};$

$\frac{೧೫ \div ೩ - ೧}{೫೭ \div ೨ + ೨} = \frac{೫ - ೧}{೨೮ + ೨} = \frac{೪}{೩೦} = \frac{೨}{೧೫};$

ಉ. ೫.

$$\frac{೪(೩ಯ-೪)-೧}{೭} = \frac{೧೧(೨ಯ+೫)-೩೨}{೧೫}$$

$$\therefore \frac{೧೨ಯ-೧೭}{೭} = \frac{೨೨ಯ+೨೩}{೧೫}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ

ಗಲಯ-೨೫೫= ಗಜಳಯ+೧೬೧

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ

೨೬ಯ= ೪೧೬

∴ ಯ= ೧೬.

[ತಾಳೆ: ಎಡಬದಿ = $\frac{೪ \times ೪೪ - ೧}{೭} = \frac{೧೭೫}{೭} = ೨೫.$

ಬಲಬದಿ = $\frac{೧೧ \times ೩೭ - ೩೨}{೧೫} = \frac{೪೦೭ - ೩೨}{೧೫} = \frac{೩೭೫}{೧೫} = ೨೫.]$

$$\text{ಉ. ೬. } \frac{೫(೪ಯ+೩)-೪}{೧೨(೫ಯ-೨)-೫} = \frac{೪(ಯ+೧)+೩(ಯ+೩)}{೭(೩ಯ+೧)-೮}$$

$$\therefore \frac{೨೦ಯ+೧೫-೪}{೬೦ಯ-೨೪-೫} = \frac{೪ಯ+೪+೩ಯ+೯}{೨೧ಯ+೭-೮}$$

$$\therefore \frac{೨೦ಯ+೧೧}{೬೦ಯ-೨೯} = \frac{೭ಯ+೧೩}{೨೧ಯ-೧}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ (೭ಯ+೧೩)(೬೦ಯ-೨೯)=(೨೦ಯ+೧೧)(೨೧ಯ-೧)

$$\therefore 4x + 2x - 2x - 2x = 4x + 2x - 2x - 2x$$

$$\therefore 4x + 2x - 2x = 4x + 2x - 2x$$

$$\therefore 2x = 2x$$

$$\therefore x = 0.$$

$$[ತಾಳೆ: ಎಡಬದಿ = \frac{2}{2} = 0. ಬಲಬದಿ = \frac{2+0}{2-2} = \frac{2}{0} = 0.]$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

೧. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭೇದವು ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡನ್ನೂ ೭ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ೬ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೨. ಳ್ಲಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಿರುವ ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಕಡೆಮೆ ಮಾಡಿ ಭೇದವನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೩. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೧ ರಿಂದ ಕಡೆಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಭೇದವನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೪. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೧ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ೬ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಭೇದವನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೫. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡನ್ನೂ ೩ ರಿಂದ ಕಡೆಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎರಡೂ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದು ೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೬. ಇಂದು ಬಾಬಣ್ಣನ ವಯಸ್ಸು ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸಿನ ೬ ರಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ೬ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೭. ಈಗ ಲಕ್ಷ್ಮೀ ಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸು ವೆಂಕಟರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ಗ್ಗೆ ಇರುತ್ತದೆ. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ಲ್ಲ ಇತ್ತು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೮. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ನಲಿನಿಯ ವಯಸ್ಸು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸಿನ ಗ್ಗೆ ಇತ್ತು. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಳ್ಲೆ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೯. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಕಮಲೆಯ ವಯಸ್ಸು ನಾರಾಯಣರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ಳ್ಲೆ ಇತ್ತು. ೨ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅದು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸಿನ ಳ್ಲೆ ಆಗುವದು. ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರು ನಾರಾಯಣರಾಯರಿಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಸಣ್ಣವರಿದ್ದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೧೦. ಲಗ್ನದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕನ ವಯಸ್ಸು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ಳ್ಲೆ ಇತ್ತು. ಈಗ ಅದು ಳ್ಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಲಗ್ನವಾಗಿ ಈಗ ೩೦ ವರ್ಷಗಳಾದವು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೧೧. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಾಲು ಇದ್ದು, ಅದರಲ್ಲಿ ನೀರು ಳ್ಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಮತ್ತೂ ನಾಲ್ಕು ಸೇರು ನೀರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ನೀರು ಳ್ಲೆ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಮೂಲ ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ನೀರು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಹಾಲು ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಮೊದಲು ಚಹದ ದರವು ಕಾಫಿಯ ದರದ ಳ್ಲೆ ಇತ್ತು. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨೮, ಮತ್ತು ೧೮. ಏರಿದ್ದರಿಂದ ಈಗ ಅದು ಳ್ಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನಿತ್ತು?

೧೩. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಳ್ಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ೨೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೨೫ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಮೊದಲನೆಯದು ಎರಡನೆಯದರ ಳ್ಲೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೧೪. ರಾಮರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಗೋವಿಂದರಾಯರ ಹತ್ತರ ಇದ್ದ ರಕಮಿನ ಳ್ಲೆ ರಕಮಿತ್ತು. ಇಬ್ಬರೂ ತಮ್ಮ ಹತ್ತರವಿದ್ದ ಹಣವನ್ನು

ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು. ರಾಮರಾಯರಿಗೆ ೧೨ ಸಾವಿರ ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಗೋವಿಂದರಾಯರಿಗೆ ೨ ಸಾವಿರ ರೂ. ಹಾನಿಯಾಯಿತು. ಈಗ ಗೋವಿಂದರಾಯರ ಹತ್ತರ ರಾಮರಾಯರ ಹತ್ತರವಿದ್ದ ರಕಮಿನಿ ೧೩ ರಕಮು ಇದ್ದರೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ಒಂದು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಿಳೇ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಕೆಂಪು ಕಮಲಗಳಿದ್ದವು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ೧೦ ಬಿಳೇ ಮತ್ತು ೧೫ ಕೆಂಪು ಹೀಗೆ ೨೫ ಕಮಲಗಳನ್ನು ಕೊಯ್ದರು. ಉಳಿದ ಕಮಲಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲಾಗಿ ಬಿಳೇ ಕಮಲಗಳು ಕೆಂಪು ಕಮಲಗಳ ಕ್ಷೇರಷ್ಟು ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿತು. ೧೦ ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ೧೫ ಬಿಳೇ ಕಮಲಗಳನ್ನು ಕೊಯ್ದರೆ ಉಳಿದ ಕಮಲಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಳೇ ಕಮಲಗಳು ಕೆಂಪು ಕಮಲಗಳ ೨ ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಕಮಲಗಳೆಷ್ಟಿದ್ದವು?

೧೧. ೨. ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತನ್ನ ಊರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಸೈಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಹೋದನು. ಅವನು ತಾನು ನಡೆಸಿದ ವೇಗಕ್ಕಿಂತ ತಾಸಿಗೆ ೨ ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು ವೇಗದಿಂದ ಸೈಕಲ್ವನ್ನು ನಡೆಸಿದ್ದರೆ ಅರ್ಧ ತಾಸು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು, ಆದರೆ ೧ ಮೈಲು ಕಡೆಮೇ ವೇಗದಿಂದ ನಡೆಸಿದ್ದರೆ ೨೦ ಮಿನಿಟು ತಡವಾಗಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಆ ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅವನು ಹೋದ ವೇಗ ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಹತ್ತಿದ ಕಾಲ ಇವುಗಳನ್ನು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗುವದು. ತಾಸಿಗೆ ೨ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಅವನು ಹೋದರೆ ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಕೆ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾದವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಕೆವೆ ಮೈಲುಗಳು ಇರುವದು. ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಮೇರೆಗೆ, ಅವನು ತಾಸಿಗೆ (೨ + ೨) ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ (ಕ - ೨) ತಾಸು-

ಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಅಂದರೆ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಅಂತರವು $(ಕ - \frac{೧}{೨})(ವ + ೧)$ ಮೈಲುಗಳು ಇರುತ್ತದೆಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅವನು ತಾಸಿಗೆ $(ವ - ೧)$ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಪ್ರವಾಸವು $(ಕ + \frac{೧}{೨})$ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಯುತ್ತಿತ್ತು ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅಂತರವು $(ಕ + \frac{೧}{೨})(ವ - ೧)$ ಮೈಲುಗಳು ಇದ್ದದ್ದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಎರಡೂ ಉರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಸ್ಥಾಯಿ (ಎಂದೂ ಬದಲಾಗದಿರುವಂಥ) ಸಂಗತಿಯು ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. $(ಕ - \frac{೧}{೨})(ವ + ೧) = ಕವ$ ಮತ್ತು $(ಕ + \frac{೧}{೨})(ವ - ೧) = ಕವ$ ಈಗ ನಾವು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವಾ.

$$(ಕ - \frac{೧}{೨})(ವ + ೧) = ಕವ$$

$$\therefore ಕವ + ೧ಕ - \frac{೧}{೨}ವ - ೧ = ಕವ$$

$$\therefore ೧ಕ - \frac{೧}{೨}ವ = ೧$$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೨ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } ೨ಕ - ವ = ೨ \quad \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } (ಕ + \frac{೧}{೨})(ವ - ೧) = ಕವ$$

$$\therefore ಕವ - ಕ + \frac{೧}{೨}ವ - \frac{೧}{೨} = ಕವ$$

$$\therefore -ಕ + \frac{೧}{೨}ವ = \frac{೧}{೨}$$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } -೨ಕ + ವ = ೧ \quad \dots \dots (೨)$$

$$೨ಕ - ವ = ೨ \quad \dots \dots (೧)$$

ಬೇರೀಜಿನಿಂದ

$$\frac{ಕ}{೨} = ೩.$$

(೨)ರಲ್ಲಿ $ಕ = ೬$ ನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, $-೯ + ವ = ೧$, ಅಂದರೆ $ವ = ೧೦$.

\therefore ಉರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು = $ಕವ$ ಮೈಲು = ೬೦ ಮೈಲು.

[ತಾಳೆ: ೧೨ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ೬೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೨|| ತಾಸುಗಳ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ, ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುತ್ತದೆ. ೯ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಅದೇ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೩|| ತಾಸುಗಳು ಹತ್ತುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ೨೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.]

ಉ. ೨. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನು ತನ್ನ ಊರಿನಿಂದ ಸಂತೆಯ ಊರಿಗೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಹೋದನು. ಅವನು ತನ್ನ ನಡಿಗೆಯ ವೇಗವನ್ನು

ತಾಸಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅವನಿಗೆ ಅಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟಲು ಅರ್ಧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ತಾಸಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ನಡೆದಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಆ ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

ಅವನು ತಾಸಿಗೆ ಗೆ ಮೈಲುಗಳ ಗತಿಯಿಂದ ನಡೆದನು ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಕೆ ತಾಸುಗಳು ಹತ್ತಿದವು, ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, ಕೆಗೆ ಮೈಲು ಇದು ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೇಲಿಂದ,

$$(ಕ - \frac{9}{2})(ಗ + \frac{9}{2}) = ಕಗ \text{ ಮತ್ತು } (ಕ + \frac{9}{2})(ಗ - \frac{9}{2}) = ಕಗ.$$

$$\text{ಈಗ} \quad (ಕ - \frac{9}{2})(ಗ + \frac{9}{2}) = ಕಗ$$

$$\therefore ಕಗ + \frac{9}{2}ಕ - \frac{9}{2}ಗ - \frac{81}{4} = ಕಗ$$

$$\therefore \frac{9}{2}ಕ - \frac{9}{2}ಗ = \frac{81}{4}$$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ} \quad ಕ - ಗ = \frac{9}{2} \quad \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad (ಕ + \frac{9}{2})(ಗ - \frac{9}{2}) = ಕಗ$$

$$\therefore ಕಗ - \frac{9}{2}ಕ + \frac{9}{2}ಗ - \frac{81}{4} = ಕಗ$$

$$\therefore -\frac{9}{2}ಕ + \frac{9}{2}ಗ = \frac{81}{4}$$

$$\text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ} \quad -ಕ + \frac{9}{2}ಗ = \frac{81}{2} \quad \dots \dots (೨)$$

$$ಕ - ಗ = \frac{9}{2} \quad \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಬೇರೇಜಿನಿಂದ} \quad \frac{9}{2}ಗ = ೧೭\frac{1}{2}$$

$$\therefore ಗ = ೩\frac{1}{2}.$$

$$(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಗ = ೩\frac{1}{2} \text{ ಹಾಕಲಾಗಿ, } ಕ - ೩\frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \text{ ಅಂದರೆ } ಕ = ೪.$$

$$\therefore \text{ಅಂತರವು} = ಕಗ \text{ ಮೈಲುಗಳು} = ೧೪ \text{ ಮೈಲುಗಳು.}$$

[ತಾಳೆ: ೪ ಮೈಲುಗಳ ಗತಿಯಿಂದ ೧೪ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೩|| ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ, ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ೩ ಮೈಲುಗಳ ಗತಿಯಿಂದ ಅದೇ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೪|| ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.]

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{\text{ಒಯ-ಛರ+೫}}{೩} - \frac{\text{ಱರ-೫ಯ-೭}}{೫} - \frac{೨೦}{೨} = \frac{೨}{೧೦};$$

$$\frac{\text{ಛಯ+೩ರ-೨}}{೪} + \frac{\text{೯ಯ-೭ರ+೩}}{೬} - \frac{೨೦}{೬} = \frac{೪೦೩}{೬}.$$

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಾವು ಮೊದಲ್ಪಟ್ಟ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವಾ.

$$\frac{\text{ಒಯ-ಛರ+೫}}{೩} - \frac{\text{ಱರ-೫ಯ-೭}}{೫} - \frac{೨೦}{೨} = \frac{೨}{೧೦};$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೩೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$\begin{aligned} ೧೦(\text{ಒಯ} - \text{ಛರ} + ೫) - ೬(\text{ಱರ} - ೫ಯ - ೭) - ೭೫ &= ೨ \\ \therefore \text{ಒಯ} - \text{ಛರ} + ೫೦ - \text{ಛಱರ} + ೩೦ಯ + ೪೨ - ೭೫ &= ೨ \\ \therefore \text{ಒಯ} - \text{ಛಱರ} + ೧೭ &= ೨ \\ \therefore \text{ಒಯ} - \text{ಛಱರ} &= \dots (೧) \end{aligned}$$

ಮತ್ತು $\frac{\text{ಛಯ+೩ರ-೨}}{೪} + \frac{\text{೯ಯ-೭ರ+೩}}{೬} - \frac{೨೦}{೬} = \frac{೪೦೩}{೬}$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೨೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$\begin{aligned} ೬(\text{ಛಯ} + ೩ರ - ೨) + ೪(\text{೯ಯ} - ೭ರ + ೩) - ೫೧ &= ೪೦೩ \\ \therefore \text{ಛಯ} + ೧೮ರ - ೧೨ + ೩೬ಯ - ೨೮ರ + ೧೨ - ೫೧ &= ೪೦೩ \\ \therefore \text{ಒಯ} - ೧೦ರ - ೫೧ &= ೪೦೩ \\ \therefore \text{ಒಯ} - ೧೦ರ &= ೧೫೦ \dots \dots (೨) \\ \text{ಒಯ} - \text{ಛಱರ} &= ೪ \dots \dots (೧) \end{aligned}$$

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ $\text{ಛಱರ} = ೧೫೬$
 $\therefore \text{ರ} = ೨.$

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $\text{ರ} = ೨$ ನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿ, $\text{ಒಯ} - ೨೦ = ೧೬$
 ಅಂದರೆ, $\text{ಒಯ} = ೧೮೦$, ಅಂದರೆ $\text{ಯ} = ೩.$

$\text{ಯ} = ೩; \text{ರ} = ೨.$

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ: $\frac{\text{೩}(\text{ಱಯ-೭ವ})}{೩} = ೧೨; \frac{೭ವ-೫(೧೩-೨ಯ)}{೩} = ೧.$
 $\frac{\text{೩}(\text{ಱಯ} - ೭ವ)}{೩} = ೧೨$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೨(೮ಯ - ೭ವ) = ೬೦$

,, ,, ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $೮ಯ - ೭ವ = ೩೦$ (೧)

$$೭ವ - ೫(೧೩ - ೨೩ಯ) = ೧$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೭೭ವ - ೫(೧೩ - ೨೩ಯ) = ೧೧$

$$\therefore ೭೭ವ - ೬೫ + ೧೧೩ಯ = ೧೧$$

$$\therefore ೧೧೩ಯ + ೭೭ವ = ೭೬$$
(೨)

(೧)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೮೮ಯ - ೭೭ವ = ೩೩೦$

$$೧೧೩ಯ + ೭೭ವ = ೭೬$$
(೨)

$$೮೮ಯ - ೭೭ವ = ೩೩೦$$

ಬೇರೀಜಿನಿಂದ

$$\frac{೨೦೩ಯ}{೨೦೩ಯ} = \frac{೪೦೬}{೨೦೩ಯ}$$

$$\therefore ಯ = ೨.$$

(೧) ನಿಯದರಲ್ಲಿ $ಯ = ೨$ ಹಾಕಲಾಗಿ,

$$೧೬ - ೭ವ = ೩೦, \text{ ಅಂದರೆ } ೭ವ = ೧೪, \text{ ಅಂದರೆ } ವ = - ೨.$$

$$ಯ = ೨; ವ = - ೨.$$

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ: $\cdot ೦೮ರ - \cdot ೧೧ಸ + ೧ \cdot ೭೬ = ೦$; $\cdot ೦೨ರ - \cdot ೦೧ಸ = \cdot ೧೨.$

$$\cdot ೦೮ರ - \cdot ೧೧ಸ + ೧ \cdot ೭೬ = ೦$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೮ರ - ೧೧ಸ = - ೧೭೬$ (೧)

$$\cdot ೦೨ರ - \cdot ೦೧ಸ = \cdot ೧೨$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೨ರ - ಸ = ೧೨$ (೨)

,, ,, ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೮ರ - ೪ಸ = ೪೮$

$$೮ರ - ೧೧ಸ = - ೧೭೬$$
(೧)

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ

$$೭ಸ = ೨೨೪$$

$$\therefore ಸ = ೩೨.$$

(೨) ನಿಯದರಲ್ಲಿ $ಸ = ೩೨$ ಹಾಕಲಾಗಿ,

$$೨ರ - ೩೨ = ೧೨, \text{ ಅಂದರೆ } ೨ರ = ೪೪, ರ = ೨೨.$$

$$ರ = ೨೨; ಸ = ೩೨.$$

ಅಥವಾ

$$\cdot ೦೮ರ - \cdot ೧೧ಸ + ೧ \cdot ೭೬ = ೦$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ

$$\cdot ೦೮ರ - \cdot ೧೧ಸ = - ೧ \cdot ೭೬$$

೨ ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$\cdot ೦೮ರ - \cdot ೧೧ಸ = - ೧ \cdot ೭೬$$

$$\cdot ೦೮ರ - \cdot ೦೪ಸ = \cdot ೪೮$$

$$\text{ವಜಾಬಾಕೆಯಿಂದ} \quad - \cdot ೦೭ಸ = - ೨ \cdot ೨೪ \quad \therefore ಸ = ೩೨.$$

೨ ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಸ = ೩೨ ನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿ

$$\cdot ೦೨ರ - \cdot ೩೨ = \cdot ೧೨$$

$$\therefore \cdot ೦೨ರ = \cdot ೪೪ \quad \therefore ರ = ೨೨.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೨.

೧. ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವೆ ಪ್ರವಾಸಿಕರನ್ನು ಒಯ್ಯುವ ಒಂದು ಬಸ್ಸು ದಿನಾಲು ಒಂದು ಊರಿನಿಂದ ಗೊತ್ತುಮಾಡಿದ ವೇಳೆಗೆ ಹೊರಟು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ವೇಳೆಗೆ ಎರಡನೇ ಊರಿಗೆ ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ. ಒಂದು ದಿನ ಸ ಹೊರಡಲು ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ತಡವಾದರೂ ತಾಸಿಗೆ ೫ ಮೈಲಿನಂತೆ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ವೇಳೆಗೆ ಅದು ಎರಡನೇ ಊರಿಗೆ ಮುಟ್ಟಿತು. ಮತ್ತು ಒಮ್ಮೆ ಕೆಲವು ಕಾರಣಗಳಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೫ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಬೇಕಾಯಿತು. ಆದರಿಂದ ಮುಟ್ಟಲು ನಿತ್ಯದಷ್ಟಿಂತ ಒಂದು ತಾಸು ತಡವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೨. ಸಾದಾ ಗಾಡಿಗಿಂತ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಮೇಲ ಗಾಡಿಗೆ ಎರಡು ಸ್ಥೇಶನಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಮಹಾಲ ಗಾಡಿಗೆ ೨ ತಾಸು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಸ್ಥೇಶನಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೩. ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿ ಸಕ್ಕರೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ಹಣವು ಖರ್ಚುಮಾಡಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ದರವು ಸೇರಿಗೆ ೧|| ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ದರವು ಸೇರಿಗೆ ೧|| ಆಣೆ ಇಳಿದಿದ್ದರೆ

೧। ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು, ಮತ್ತು ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ೨ ಇಂ.ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು ೧ ಇಂ. ನಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅಥವಾ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ೩ ಇಂ.ಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಅಗಲಳತೆಯನ್ನು ೨ ಇಂ.ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೂ ಸಹ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅಷ್ಟೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತಿಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೫. ಕೆಲವು ಜನರು ಕೆಲವು ದಿನಸ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿ ತಮ್ಮ ಊರೊಳಗಿನ ರಸ್ತೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿದರು. ಮೊದಲಿಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ದಿನಸಗಳು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಐದು ಮಂದಿ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕು ದಿನಸಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಜನರು ಇದ್ದರು, ಮತ್ತು ಅವರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಸಗಳು ಹತ್ತಿದ್ದವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪುಟದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ೯ ಪುಟಗಳು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಾಲು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ೫ ಪುಟಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಮುದ್ರಿಸಿದ ಪುಟಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪುಟದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೭. ರಾಮ, ಗೋವಿಂದ ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣ ಇವರು ತಮ್ಮ ಊರಿಂದ ಎರಡನೇ ಊರಿಗೆ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲಿಂದ ಹೋಗಲು ಒಂದೇ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಹೊರಟರು. ಗೋವಿಂದನಿಗಿಂತ ರಾಮನು ತಾಸಿಗೆ ಒಂದು ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು, ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣನು ಒಂದು ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ಹೋಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನಿಗಿಂತ ರಾಮನಿಗೆ ೭ ಮಿಲಿಟುಗಳು ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣನಿಗೆ ೯ ಮಿಲಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ..

೮. ಒಂದು ಸಮಾರಂಭಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಣ್ಣ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಲು ಅವೇಕ್ಷಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಾಕಾಗುವ ಕೆಲವಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು

ತನ್ನ ಹತ್ತರ ತಕ್ಕೊಂಡನು. ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ೧೦೦ ಹುಡುಗರು ಹೆಚ್ಚು ಬಂದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಹುಡುಗನ ಪಾಲಿಗೆ ಒಂದು ಆಣೆ ಕಡಿಮೆ ಬಂದಿತು. ೬೦ ಹುಡುಗರು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಒಂದು ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಹುಡುಗರೆಷ್ಟು ಇದ್ದರು, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಿಕ್ಕಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೯. ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹತ್ತರ ಇರುವ ಮೂರು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋ-
ನಾಕೃತಿಯ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ ಹೊಲಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರ ಉದ್ದಳತೆಯು
ನಡುವಿನದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೪ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೨
ವಾರು ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ನಡುವಿನದರ
ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೬ ವಾರು ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೪ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು
ಇದ್ದರೆ ನಡುವಿನ ಹೊಲದ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೦. ತನಗೆ ವಿವಕ್ಷಿತವಾದ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವು ಸಿಗಬೇಕೆಂಬ
ಇಚ್ಛೆಯಿಂದ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಕೆಲವು ರಕಮನ್ನು ಒಬ್ಬ ಸಾಹುಕಾರನ
ಹತ್ತರ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟನು. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ೨% ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ
೧೦ ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ೨% ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ೭||
ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಇಡಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು
ರಕಮನ್ನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

$$೧೧. \text{ } x + \frac{1}{2}(2r - 1) = 2r; \quad \frac{1}{2}(4y + 3r) + 2r = 3x.$$

$$೧೨. \frac{1}{3}r - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}v - 1) + 1 = 0; \quad \frac{1}{2}(v + 2r) + \frac{1}{3}(4r - 3v) = 4.$$

$$೧೩. \frac{1}{2}(y + 4s - 1) - \frac{1}{3}(3y - 3s + 1) + 2r = 0; \quad 1y - 2s = 0.$$

$$೧೪. (y - 4)(2 + 1) = (y - 3)(2 + 3); \quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6} = 0.$$

$$೧೫. (3y - \frac{1}{2})(4v + 2) = (1y + \frac{1}{2})(10v - 1); \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$೧೬. 2r - 4s = 2; \quad \frac{1}{2}r - \frac{1}{3}s = \frac{1}{6}.$$

$$೧೭. 0.08l + 0.10v = 0.1; \quad 0.22l - 0.25v + 0.04 = 0.$$

$$೧೮. 0.08(2.52y - 0.10v) - 0.222x = 0;$$

$$0.2(0.25y + v) - 0.1(0.22y - v) = 0.2.$$

(ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ) ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಗಳು

ಮೊದಲನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಎರಡು ಗಾಡಿಗಳ ತಾಸಿನ ವೇಗಗಳಲ್ಲಿ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವು ಇರುತ್ತದೆ. ೨೪೦ ಮೈಲು ಹೋಗಲಿಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗಾಡಿಗೆ ಎರಡನೇ ಗಾಡಿಗಿಂತ ೨ ತಾಸು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು?

$$೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ : (ಅ) (ಜಯ + ೨)(೩ಯ - ೪) - (೭ಯ + ೩)(೪ - ೨) \\ = ೨(೨ಯ - ೧) + ೧೧.$$

$$(ಆ) ೮ರ - ೫ಲ = ೧೧ ; ೧೩ರ + ೪ಲ = ೩೦.$$

೩. ಅರ್ಧವರ್ತುಗಳದ ಪರಿಮಿತಿಯು (ಪ) ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಇಂ. ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧವರ್ತುಗಳದ ಪರಿಮಿತಿಯು ಎಷ್ಟಿರುವದು?

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

$$(ಅ) ೧೪ಯ - ೫೭ಯ - ೨೭.$$

$$(ಆ) ೧೬ಯ - ೮ಯರ - ೨೪ರ + ೧೦ರಲ - ೮.$$

$$(ಇ) ೧೨೫ರ - ೩೪೩ಸ.$$

೫. ೪ಪ - ೨೮ಪ + ೪೯, ೪ಪ - ೪೯ ಮತ್ತು ೬ಪ - ೭ಪ - ೪೯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ೮. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

$$೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ : \frac{೮}{೨ಯ - ೭} - \frac{೮}{೨ಯ - ೫}.$$

೭. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಒಂದೇ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಖರ್ಚಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೩ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ, ೪ ಖರ್ಚಿಗಳು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ೪ ಖರ್ಚಿಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು, ಮತ್ತು ದರವು ಯಾವುದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಎರಡನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಹೆಣ್ಣು ಮಾರುವವಳು ೧೪ ಆ. ಗೆ ಡಬ್ಬುನ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಳು. ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೧೫ ಕೊಳೆತದ್ದರಿಂದ

ಅವುಗಳನ್ನು ಒಗೆದು, ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಅವಳು ೪ ಅ. ಗೆ ೩ರಂತೆ ಮಾರಿದಳು. ಈ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವಳಿಗೆ ಒಂದು ರೂ. ಲಾಭವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವಳು ಎಷ್ಟು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದಳು?

$$\text{೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) } \cdot ೪೨ಯ + \cdot ೩(\cdot ೨ಯ - \cdot ೫) + \cdot ೧೬ \\ = \cdot ೫(\cdot ೩ಯ - \cdot ೭) + ೧ \cdot ೩೫.$$

$$(ಆ) ೫ರ + \frac{೩}{೭} ಲ = ೧೯; ೫ರ - ೨ಲ = ೩೨.$$

೩. ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ನ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಐದು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು (ಬ) ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ೪೭೯೮, ೪೭೯೯, ೪೮೦೦, ೪೮೦೧ ಮತ್ತು ೪೮೦೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ಐದು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೦೦೦ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

$$(ಅ) ೮ಯ + ೨೨ಯ - ೨೧.$$

$$(ಆ) ೧೬ಯ - ೪೦ಯರ + ೨೫ರ + ೧೨ಯ - ೧೫ರ.$$

$$(ಇ) ೮ರ - ೧೨ರ ಸ + ೧೮ರ ಸ - ೨೭ಸ.$$

೫. ಕ - ೨೫ಗ, ಕ - ೧೨೫ಗ, ಮತ್ತು ಕ - ೬೫ಗ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

$$\text{೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: } \frac{೪}{೮} - \frac{೮}{೮} - \frac{೮}{೮} - \frac{೮}{೮}.$$

೭. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ೩ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಲಾಗಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ೫ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೩ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲಾಗಿ ೨ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಮೂರನೆಯ ಸತ್ರಿಕೆ.

೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೪ ಇದ್ದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕಿಂತ ೫೬ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

$$\text{೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) } \frac{ಯ + ೫}{೮} - \frac{೪ಯ - ೭}{೫} = ೧ - ೪ಯ + \frac{೯ಯ - ೫}{೨}.$$

(ಅ) $9(40 + 20) = 540 - 20 - 20$; $20 - 20 + 0 = 0$.

೩. ಕೋಣೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಉ), ಅಗಲಳತೆಯು (ಅ), ಎತ್ತರವು (ಎ), ಮತ್ತು ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಗೋಡೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಉದ್ದಳತೆಯು ೧೫ ಫು., ಅಗಲಳತೆಯು ೧೪ ಫು., ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೧೨ ಫು. ಇದ್ದರೆ ಗೋಡೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $4x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x^2$.

(ಆ) $4x^2 - 12x^2y - 8x^2y + 2xy^2$.

(ಇ) $2x^2 - 2xy + 4y^2$.

೫. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೭ ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ೭ ರಿಂದ ಏನೂ ಶೇಷವಿಲ್ಲದೇ ಭಾಗವು ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 12x + 20} - \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 10x + 24}$.

೭. ದರವು ಮೊದಲಿನದೇ ಇರಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದು ಬೇಕಾಗಿರುವಷ್ಟೇ ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಾನು ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಹೋದಾಗ, ಅದು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೨೮. ಹೆಚ್ಚಾದ್ದರಿಂದ ೩ ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳು ಕಡಿಮೆ ಸಿಕ್ಕವು. ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೨೮. ಇಳಿದಿದ್ದರೆ, ೬ ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ನನಗೆ ಎಷ್ಟು ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದವು ಮತ್ತು ನನ್ನ ಹತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಛೇದವು ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ೪ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಎರಡರೊಳಗಿಂದಲೂ ೧ ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೬ಯ-೫}{೫} + \frac{೨೧ಯ-೩}{೧೦} + \frac{೩ಯ}{೨೦} = \frac{೯ಯ+೨}{೪} - ೧.$

(ಆ) $(೫ಯ-೪)(೨ರ+೩)=(ಯ-೨)(೧೦ರ+೧); ೮ಯ+೯ರ=೫.$

೩. ಹಿಂದಿನ ಪತ್ರಿಕೆಯೊಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಆ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಉದ್ವಳತೆಯು ೧೨ ಫೂ., ಎತ್ತರ ೧೦ ಫೂ., ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಗೋಡೆಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೪೪೦ ಚೌ. ಫೂ. ಇದ್ದರೆ, ಕೋಣೆಯ ಅಗಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೭ಯ^೨ - ೨೨ಯರ + ೧೬ರ^೨ + ೩೫ಯ - ೪೦ರ.$

(ಆ) $೭೨ರ^೩ - ೭೨೯೮೩.$

(ಇ) $೮೧ದ^೪ - ೨೫೬ನ^೪.$

೫. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨೫ ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ೨೫ ರಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವು ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೪}{ಯ} - \frac{೨}{ಯ-೧} + \frac{೨}{ಯ^೨-ಯ}$

೭. ೨ ರೂ. ೧೦ ಆ.ಗೆ ರತ್ನಲು ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ೭ ಆ.ಗೆ ರತ್ನಲು ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ ನನ್ನ ೧೬ ರೂ. ೧೦ ಆ. ಖರ್ಚಾದವು. ಚಹದ ದರವು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ಆ. ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧ ಆ. ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ೨ ಆ. ಕಡಿಮೆ ಖರ್ಚಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ನಾನು ಎಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಂಡೆನು?

ಐದನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨೦೦ ಇದ್ದು, ಒಂದರ ೧೬ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ೯ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೯ಸ-೧೪}{೪} - \frac{೫ಸ+೨೨}{೧೨} = \frac{೭ಸ-೧೬}{೬}.$

$$(ಆ) \frac{೪೮}{೫} - \frac{೩೮}{೪} + ೨ = ೦; \frac{೫೮}{೬} + \frac{೪೮}{೯} = ೭೦\frac{೨}{೩}.$$

೩. ಅ ಫೂ. ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉ ಫೂ. ಉದ್ದವಿರುವ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಲು ಗೋಡೆಗುಂಟೆ ೨ ಫೂ. ಅಗಲ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಗುಡಾರನ್ನು ಹಾಸಿದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? ಚೌರಸ ಫೂಟಿಗೆ ಕೆರೂ. ಯಂತೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ೧೬ ಫೂ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು ೧೪ ಫೂ. ಅಗಲವಿರುವ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಸಿದ ಗುಡಾರದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪ್ರಥಮಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

$$(ಅ) ೨೮ - ೧೦೨೮ + ೧೦೮೦.$$

$$(ಆ) ೪೮ - ೨೦೮೮ + ೨೦೮೦ - ೩೬೪೮.$$

$$(ಇ) ೫೮ - ೭೮ + ೫೮ - ೭೮.$$

೫. ೧೬೮ - ೧೦೦೮, ೭೮ - ೩೬೦೮ + ೪೫೦೮, ಮತ್ತು ೪೮೮ + ೨೪೦೮ + ೩೦೦೮ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. $\frac{೫}{೬}$ (೩ - ೨) + $\frac{೫}{೬}$ (೪ - ೫) - $\frac{೫}{೬}$ (೨ - ೯) ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೭. ಒಂದು ಆಯತದ ಎದಿರುಬದರಿನ ಎರಡು ಭುಜಗಳು (೮ - ೫) ಇಂ. ಮತ್ತು (೩ - ೨) ಇಂ. ಇದ್ದು, ಉಳಿದ ಎರಡು ಬದಿಗಳು (೫ - ೭) ಇಂ. ಮತ್ತು ೫(೪ - ೬) ಇಂ. ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರಿ.

ಆರನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನ ವಯಸ್ಸು ಇಂದು ಅವನ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದ್ದು, ೯ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಅದು ಮಗನ ಅಂದಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ೨ ಪಟ್ಟು ಇತ್ತು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೫}{೬}$ (೫ + ೨) - $\frac{೫}{೬}$ (೭ - ೨) = ೩ + ೧.

$$(ಆ) \frac{೮ - ೩}{೫} = \frac{೫ - ೩}{೫}; \frac{೫(೨ + ೩)}{೩} = \frac{೫ + ೩}{೨}.$$

೩. ಪ್ರಾರಂಭದ ತಿಂಗಳ ಪಗಾರವು (ಸ), ವರ್ಷದ ಬಡತಿಯು (ಬ), ಮತ್ತು ಯಾವದೇ ವರ್ಷ (ವ)ದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ತಿಂಗಳ ಪಗಾರವು (ಪ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪೆ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ. ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷ ೫೬ರೂ. ಪಗಾರವು ಇದ್ದು, ವರ್ಷದ ಬಡತಿಯು ೫ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ೯ನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪಗಾರವು ಸಿಗಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣವೃದ್ಧಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) ೪೮ಕ^೨ - ೪೨ಕ + ೯.

(ಆ) ೧೬ಯ^೨ - ೨೪ಯವ + ೩೦ವಕ್ಷ - ೨೫ಕ್ಷ^೨.

(ಇ) ೬(೨ಯ + ೧)^೨ + ೧೩(೨ಯ + ೧) - ೬೩.

೫. ೧೬ಯ^೨ - ೧೦೦ವ^೨, ೮ಯ^೨ - ೮ಯವ - ೩೦ವ^೨, ಮತ್ತು ೧೨ಯ^೨ - ೬೦ಯವ + ೭೫ವ^೨ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೬}{ಅ} + \frac{೮}{ಅ-೧} - \frac{೧೬}{ಅ-೧}$.

೭. ಭೂಮಿಯ ಮೂರು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ ತುಣುಕುಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೬ ವಾರು ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರಗಿಂತ ೫ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು, ಮೂರನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೯ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಅಗಲಳತೆಗಿಂತ ೫ ವಾರು ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಏಳನೆಯ ಸತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಂದು ನಾಟಕದಲ್ಲಿ ೨ರೂ, ೩ ರೂ, ಮತ್ತು ೫ ರೂ, ಹೀಗೆ ಮೂರು ದರಗಳ ತಿಕೀಟುಗಳು ಇದ್ದವು. ೫ ರೂ. ದರದ ತಿಕೀಟುಗಳ ನಾಲ್ಕು-ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೨೦ ಹೆಚ್ಚು ೩ರೂ. ದರದ ತಿಕೀಟುಗಳು, ಮತ್ತು ಈ ಎರಡೂ ದರಗಳ ತಿಕೀಟುಗಳು ಎಷ್ಟು ಮಾರಲ್ಪಟ್ಟವೋ ಅವುಗಳ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೪೦ ಹೆಚ್ಚು ೨ ರೂ. ದರದ ತಿಕೀಟುಗಳು ಮಾರಲ್ಪಟ್ಟವು. ಒಟ್ಟು

ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೪೦ ರೂ. ಗಳಾಯಿತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಎಷ್ಟು ತಿಕ್ಕೇಟುಗಳು ಮಾರಲ್ಪಟ್ಟವು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\cdot ೨೫ಯ + \cdot ೩(೨.೪ಯ - ೮) = \cdot ೪(ಯ - \cdot ೩).$

(ಆ) $೫(೩ಯ-೫ರ+೨)=೧೩(೨ಯ+೪ರ+೫); ೯ಯ-೮ರ=೨೩.$

೩. ಹಿಂದಿನ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿಯ ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ವ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ೧೧೧ ರೂ. ತಿಂಗಳ ಸಗಾರವು ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಸಿಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಸೃಢಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) ಯ(ಯ-ಗ)-ವ(ವ-ಗ).

(ಆ) $೫೬ಪ - ೫೨ಪಬ + ೧೨ಬ.$

(ಇ) $೨೭ಪ - ೯ಪಮ + ಪಮ - ೨೨ಮ.$

೫. $೪ಪ - ೩೨ಬ, ೧೨ಪ - ೪೮ಬ, ಮತ್ತು ೩೨ಪ - ೮೦ಪಬ + ೩೨ಬ$ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೪}{ಪ-ಮ} - \frac{೮}{ಮ-ಪ} - \frac{೬ಪ+೬ಮ}{ಪ-ಮ}.$

೭. ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿಗಿಂತ ೨ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವ ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ, ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬೪ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿಂದ ೨೯೭ ಕಳೆಯಲಾಗಿ, ಎಕ್ಕಂ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ಎಂಟನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಂದು ಮೋಟಾರ ಗಾಡಿಯು ಮೊದಲು ತಾಸಿಗೆ ೩೫ ಮೈಲಿನಂತೆ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ೩೦ ಮೈಲಿನಂತೆ ಒಂದು ಊರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ೩೨ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಅಂತರವನ್ನು ೩೦ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೨೫ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ೩೮ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೨ಯ+೭}{೩} - \frac{೮-ಯ}{೫} + \frac{೫ಯ+೧}{೧೨} = ೪೩$.

(ಆ) $\cdot ೬೫ಯ-೧\cdot ೨ವ = \cdot ೨$; $೯ಯ-೭\cdot ೨ವ = ೨೧\cdot ೬$.

೩. ಒಂದು ಖಾನಾವಳಿಯಲ್ಲಿ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು (ಖ) ರೂಪಾಯಿ. ಸ ಇದು ಊಟ ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಖ = ೪೮೦ + ೫೨ಸ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸ ಇದು ಕರ್ತೃವು ಇರುವಂತೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ೨೦೪೪ ರೂ. ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು ಇದ್ದಾಗ ಊಟ ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಷ್ಟಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೭೫ಯ + ೭೦ಯ - ೮೦$.

(ಆ) $೨೭ಪ - ೪೫ಪ + ೭೫ಪ - ೧೨೫ಬ$.

(ಇ) $೪ಪ + ೧೧ಪ + ೨೫ಬ$.

೫. ೫೪ಪ-೯೬ಮ, ೮೧ಪ-೧೯೨ಮ, ಮತ್ತು ೧೮ಪ-೪೮ಪಮ + ೫೨ಮ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೫ಯ-ಯ-೬}{೬ಯ+೭ಯ-೫} \times \frac{೬ಯ+೧೩ಯ+೫}{೬ಯ+೭ಯ-೫}$.

೭. ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ವಯಸ್ಸಿನ ಸರಾಸರಿಯು ೧೩ ವರ್ಷಗಳು ೧೦ ತಿಂಗಳು ಇತ್ತು, ಅದು ೧೬ ವ., ೧೫ ವ. ೮ ತಿಂ., ೧೫ ವ. ೩ ತಿಂ., ಮತ್ತು ೧೬ ವ. ೧ ತಿಂ., ವಯಸ್ಸುಗಳ ನಾಲ್ಕು ಹೊಸ ಹುಡುಗರು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬಂದುದರಿಂದ ೧೪ ವರ್ಷಗಳಾಯಿತು. ಆದರೆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹುಡುಗರು ಇದ್ದರು?

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ೪ ರೂ.ಗೆ ಚೌ. ವಾರು ಈ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿನ ೫೦೦ ಚೌ. ವಾರು ತನ್ನ ಸಲುವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ೭ ರೂ. ದರದಿಂದ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ಸ್ವತಃ ಸಲುವಾಗಿ ಜಾಗೆಯು ವುಕ್ಕಟಿಯಾಗಿ ಸಿಕ್ಕಿದ್ದಲ್ಲದೇ ೪೬೦ ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{1}{2}(1ಯ+೧೩)+\frac{1}{2}ಜಿ(ಯ-೨)=\frac{೧}{೨}+\frac{೧}{೨}(೩ಯ-೨೬)$.

(ಆ) $ಜಯ - \frac{೪ಯ+೧೩ಪ್ಲ}{೨} = ೭$; $೩ಪ್ಲ + \frac{೨ಯ+ಪ್ಲ}{೫} = ೪$.

೩. ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವು (ಪ) ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಪ = ೪π ತ ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ೨.೮ ಫೂಟು ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ತ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಈ ಸೂತ್ರದ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ೧೫೪ ಚೌ. ಇಂ. ಪೃಷ್ಠಫಲವಿರುವ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಎಷ್ಟಿರುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೨೪ಯ^೨+೨೮ಯ-೨೨೦$.

(ಆ) $ಪ^೨ - ೭ಅಪ - ೬೪ಬ^೨ + ೫೬ಅಬ$.

(ಇ) $೧೬ಮ^೪ + ಮ^೨ + ೧೬$.

೫. $(೪ಯ-೫ರ)^೩ + (೫ರ-೨ಯ)^೩$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ೨ಯ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೬ಕ^೨+ಕ-೧೫}{೪ಕ^೨-೪ಕ-೩} - \frac{೧೨ಕ^೨+೧೩ಕ-೪}{೮ಕ^೨+೨ಕ-೧}$.

೭. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೫ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಕೆಲವನ್ನು ೪ ದರದಿಂದ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟನು. ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಈ ಹಣದ ಮೇಲೆ ಅವನಿಗೆ ಒಟ್ಟು ೪೩೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಸಿಕ್ಕಿತು. ಮೊದಲನೇ ರಕಮು ಬರೇ ೪ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೩೨ ದರದಿಂದ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿಯು ೩೬೫ ರೂ. ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ರಕಮನ್ನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಹತ್ತನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನು ಸಂತೆಯ ದಿವಸ ಎರಡು ಎತ್ತುಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರೂ.ಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಮತ್ತು ತನ್ನ ಊರಿಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ತಂದು, ಒಂದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭದಿಂದ, ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ಹಾನಿಯಿಂದ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೨೦ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎತ್ತನ್ನು ಅವನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೫ನ-೩}{೭} + \frac{೩ನ+೨}{೨} = \frac{೫ನ-೬}{೪} - \frac{೭ನ-೨}{೧೨}$.

(ಆ) $\frac{ಯ+ವ}{೧೫} + \frac{೨ಯ+೩ವ}{೧೨} = ೧೩; \frac{೫ಯ-೩ವ}{೯} - \frac{೪ವ-ಯ}{೫} = ೦.$

೩. ತಳವು ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಭಾಗವು ಚೌರಸವಿರುವ ಸಮಕೋನಚತುರ್ಭುಜ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲವು (೫), ಅದರ ಎತ್ತರವು (ಎ) ಮತ್ತು ತಳದ ಬದಿಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಉ), ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ. ತಳದ ಬದಿಯ ಲ ಇಂ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೧೦೦ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲವೆಷ್ಟಿರುವದು?

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ: (ಅ) $(೭ಯ-೯ರ)^೨ + ೨೫೨ಯರ.$

(ಆ) ಕಗ - ೫ಕ + ಗ - ೫.

(ಇ) $೪೨ಯ^೨ - ೩೫ಯ - ೪೨.$

೫. $೩ನ^೨ - ೨೧ನ + ೩೦$, $೯ನ^೨ + ೨೭ನ - ೯೦$, ಮತ್ತು $೧೩ನ^೨ - ೧೦೮ನ - ೩೧೨$ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೫}{ವ-ಲ} - \frac{೫}{ಪ+ಲ} + \frac{ಪ-ಲಲ}{ಪ^೨-೬ಲ}$.

೭. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರಿರೇಜಿನಲ್ಲಿ ೩ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ೫ ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿಂದ ೧೮ ಕಳೆದರೆ ಅದು ತಿರುವು ಮುರುವು ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಮೂರು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಮೊದಲನೆಯದು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದು, ಇವುಗಳ ಬೇರಿರೇಜಿನಲ್ಲಿ ೨೩ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೯-ಯ}{೫} + \frac{೧೮-೫ಯ}{೨} + \frac{೩(೭ಯ-೧೫)}{೧೧} - ೧೧೨ = ೮೩.$

(ಆ) $೮ಯ + \frac{೩ರ-೪ಯ}{೫} + ೬ = ೦; ೯ರ - \frac{೨ಯ+೫ರ}{೧೧} = ೧೬.$

೩. ಹಿಂದಿನ ಪತ್ರಿಕೆಯೊಳಗಿನ ಸೂತ್ರದ, ಎ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪುನರ್ವಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ತಳವು ೬ ಇಂ. ಭುಜದ ಚೌರಸ-ವಿದ್ದು ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲವು ೨೪೦ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವ ಡಬ್ಬಿಯ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು?

೪. ಗುಣವೃದ್ಧಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) ೬೪ರ^೩ + ೩೩೬ರ^೨ + ೫೮೮ರ^೧ + ೩೪೩ಸ^೩.

(ಆ) ೮ಪ^೨ - ೬ಪಮ - ೨೭ಮ^೨ + ೨೦ಪ - ೪೫ಮ.

(ಇ) ೩೬ಕ^೨ - ೬೦ಕಗ + ೨೫ಗ^೨ - ೬ಕ + ೫ಗ - ೨.

೫. ೫ತ^೨ + ೮೦ತನ + ೩೦೦ನ^೨, ೩ತ^೨ - ೧೯೨ನ^೨, ಮತ್ತು ೩೦ತ^೨ + ೨೫೫ತನ - ೧೨೦ನ^೨ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

$$\frac{೧}{ಯ^೨-೪ಯ+೪} - \frac{೨}{ಯ^೨-೪} + \frac{೧}{ಯ^೨+೪ಯ+೪}$$

೭. ಮೂರು ಮಂದಿ ಒಕ್ಕಲಿಗ ಬಂಧುಗಳು ಪಾಲು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ-ದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರು. ಆಗ ಅವರ ಹತ್ತರ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯ ನಾಲ್ಕು ಆಕಳುಗಳು, ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯ ನಾಲ್ಕು ಎತ್ತುಗಳು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಎಮ್ಮೆ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೪೫೦೦ ರೂ. ಬೆಲೆಯ ೯ ದನಗಳಿದ್ದವು. ಪಾಲು ಸರಿಯಾಗಿ ಆಗುವದಕ್ಕಾಗಿ ಒಬ್ಬನಿಗೆ ಒಂದು ಆಕಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಎತ್ತುಗಳು, ಎರಡನೆಯವನಿಗೆ ಮೂರು ಆಕಳುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಎತ್ತು, ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯವನಿಗೆ ಎಮ್ಮೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಎತ್ತು, ಹೀಗೆ ಬರುವಂತೆ ಪಾಲು ಮಾಡಿದರು. ಆದರೆ ಆಕಳು, ಎತ್ತು ಮತ್ತು ಎಮ್ಮೆ ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಹನ್ನೆರಡನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಮೂರು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವಿದ್ದು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಒಂಬತ್ತು ಇದೆ. ಶತಂ ಮತ್ತು ದಹಂ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅಂಕಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೯೦ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{9}{10}(\text{ಯ} - ೨) + \frac{9}{8}(\text{೨ಯ} - ೩) - \frac{9}{6}(\text{೩ಯ} - ೪) + \frac{9}{4}(\text{೪ಯ} - ೫) = ೧.$

$$(ಆ) \frac{೨೦-೩ಸ}{೫} = \frac{೩೦+೨ಸ}{೩} - ೩; \frac{೮೦+೩ಸ}{೫} = \frac{೪ಸ-೯೦}{೬} + ೬.$$

೩. ಯಾವದೇ ಬಹುಭುಜ ಆಕೃತಿಯ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು (ಬ), ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಭ) ದ ಇಮ್ಮಡಿ ಉಣಾ ನಾಲ್ಕು ಕಾಟಕೋನ-ಗಳಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಬ = ೨ಭ - ೪ ಈ ಸೂತ್ರವು ವ್ಯಕ್ತ-ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಭ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಈ ಸೂತ್ರದ ಪುನರ್ನಿರ್ದೇಶನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೬ ಕಾಟಕೋನಗಳಿದ್ದರೆ ಆಕೃತಿಯು ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳುಳ್ಳದ್ದು ಇರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣವೃದ್ಧಕೃಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ: (ಅ) ೬೪ಪ^೩ - (೩ಪ - ೨)೩.

(ಆ) ೪ಯ^೪ - ೧೭ಯ^೩ + ೪.

(ಇ) ೭೦ನ^೩ - ೩೬ನ - ೨೦.

೫. ೧೬ಪ^೪ - ೨ಪ, ೧೦೦ಪ^೩ - ೪ಪ - ೨೩, ಮತ್ತು ೧೬ಪ^೩ - ೨೪ಪ^೨ + ೧೨ಪ - ೨ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ:

$$\frac{\dots \dots \dots}{ಪ^೨-೮ಪ+೧೫} = \frac{ಪ^೨+೨ಪ-೩}{ಪ^೨-೪ಪ+೩} = \frac{ಪ^೨-ಪ-೧೨}{\dots \dots \dots}.$$

೭. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ಮೂರು ಆಕಳುಗಳನ್ನು ಸಂತೆಯ ದಿನ ಒಂದು ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭದಿಂದ, ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ಲಾಭದಿಂದ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೫ ಲಾಭದಿಂದ ತನ್ನ ಊರಿನಲ್ಲಿ ಮಾರಿದನು. ಒಟ್ಟು ೧೦೧ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಆಕಳುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೭ ಮತ್ತು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾರಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೫ ಹಾನಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಮಾರಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ಕೇವಲ ೧ರೂ. ಲಾಭ-ವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಕಳನ್ನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

ಮಹತ್ವದ ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳು

ಈಗಿನ ವರೆಗೆ ಬಂದ ಗುಣಕ-ವಿಷಯವಾದ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತಾರ-ವಿಷಯವಾದ ಎಲ್ಲ ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಒಂದೇ ಕಡೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯು ಆಗಬೇಕೆಂದು ಇಚ್ಛೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರು ಈ ಎಲ್ಲ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವದು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಿರುವದು. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಗ್ಗಿಗಳಿಗೆ ಮಹತ್ವವಿರುವಂತೆ ಈ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವವಿದೆ. ಮಗ್ಗಿಗಳು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಜಾಣತನದಿಂದ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬಂದರೆ, ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ})^1 \equiv \text{ಪ}^1 + \text{೨ಪಬ} + \text{ಬ}^1$$

$$(\text{ಪ} - \text{ಬ})^1 \equiv \text{ಪ}^1 - \text{೨ಪಬ} + \text{ಬ}^1$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ})(\text{ಪ} - \text{ಬ}) \equiv \text{ಪ}^2 - \text{ಬ}^2$$

$$(\text{ಯ} + \text{ಪ})(\text{ಯ} + \text{ಬ}) \equiv \text{ಯ}^2 + (\text{ಪ} + \text{ಬ})\text{ಯ} + \text{ಪಬ}$$

$$(\text{ಯ} + \text{ಪ})(\text{ಯ} + \text{ಬ})(\text{ಯ} + \text{ಮ}) \equiv \text{ಯ}^3 + (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})\text{ಯ}^2$$

$$+ (\text{ಪಬ} + \text{ಬಮ} + \text{ಮಪ})\text{ಯ} + \text{ಪಬಮ}$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2 + 2\text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2$$

$$\equiv \text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 + 2\text{ಪಮ}(\text{ಪ} + \text{ಮ})$$

$$(\text{ಪ} - \text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2 - 2\text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2$$

$$\equiv \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 - 2\text{ಪಮ}(\text{ಪ} - \text{ಮ})$$

$$\text{ಪ}^2 + \text{ಮ}^2 \equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ})^2 - 2\text{ಪಮ}(\text{ಪ} + \text{ಮ})$$

$$\equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ})(\text{ಪ}^2 - \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2)$$

$$\text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 \equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ})^2 + 2\text{ಪಮ}(\text{ಪ} - \text{ಮ})$$

$$\equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ})(\text{ಪ}^2 + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2)$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^1 \equiv \text{ಪ}^1 + \text{ಬ}^1 + \text{ಮ}^1 + \text{೨ಪಬ}$$

$$+ \text{೨ಪಮ} + \text{೨ಬಮ}$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^2 \equiv \text{ಪ}^2 + \text{ಬ}^2 + \text{ಮ}^2 + 2\text{ಪಬ}(\text{ಪ} + \text{ಬ})$$

$$+ 2\text{ಬಮ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) + 2\text{ಪಮ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) + 2\text{ಪಬಮ}$$

$$\text{ಪ}^2 + \text{ಪ}^2\text{ಮ}^2 + \text{ಮ}^2 \equiv (\text{ಪ}^2 + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2)(\text{ಪ}^2 - \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2)$$

ಉತ್ತರಗಳು

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೧.

ಪು. ೮-೧೫.

೧. ೧೨೦೦ ರೂ.; ೮೦೦ ರೂ. ೨. ೬೦ ವಾರು, ೪೦ ವಾರು; ೧೦೦ ವಾರು, ೫೦ ವಾರು. ೩. ೩೦ ಮೈ. ೪. ೪೦೦೦ ರೂ.; ೧೨೦೦೦ ರೂ. ೫. ೭೦ ರತ್ನಲು. ೬. ೫೬೭. ೭. ೨೮; ೩೬. ೮. ೪೮ ರೂ.; ೬೪ ರೂ. ೯. ೧೮ ಇಂ.; ೧೨ ಇಂ. ೧೦. ೨೫ ಮೈ.; ೩೫ ಮೈ. ೧೧. ೨೪೬. ೧೨. ೫೦. ೧೩. ೭ ಮೈ. ೧೪. ೨|| ರೂ.; ೧೨ ಆ. ೧೫. ೫೦ ಡ.; ೧೫೦ ಡ. ೧೬. ೮೦೦ ರೂ.; ೧೨೦೦ ರೂ. ೧೭. ೧೦|| ಮೈ. ೧೮. ೫೩೪. ೧೯. ೪೦೦೦ ರೂ. ೨೦. ೨೪೦೦೦ ರೂ.; ೨೬೦೦೦ ರೂ. ೨೧. ೪೬೮. ೨೨. ೪೬೬; ೧೨೬೬; ೨೪೬. ೨೩. ೬೦; ೩೬. ೨೪. ೨ ರೂ. ೧ ಆ. ೨೫. ೪೮ ಶೇರು. ೨೬. ೫೨. ೨೭. ೮೪. ೨೮. ೧೫ ಮೈ. ೨೯. ೧೦೦. ೩೦. ೬೪; ೬೫. ೩೧. ೫೦ ಮೈ. ೩೨. ೧೦ ವ.; ೧೪ ವ.; ೪೮ವ. ೩೩. ೭೦೫. ೩೪. ೧೫೦೦ ಚೌರಸ ವಾರು. ೩೫. ೪೨ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ. ೩೬. ೯೦೦೦ ರೂ.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨.

ಪು. ೧೮-೨೦.

೧. ೨. ೨. ೪. ೩. ೧. ೪. ೫. ೫. ೩. ೬. ೪. ೭. ೨೪. ೮. ೮. ೯. ೪೩. ೧೦. ೪. ೧೧. ೧೩. ೧೨. ೭. ೧೩. ೫. ೧೪. ೨. ೧೫. ೨೩. ೧೬. ೨. ೧೭. ೯೪. ೧೮. ೨. ೧೯. -೧೨೫. ೨೦. ೨. ೨೧. ೨. ೨೨. -೪. ೨೩. ೪. ೨೪. -೪. ೨೫. ೦. ೨೬. ೭. ೨೭. ೩೪. ೨೮. ೧. ೨೯. ೬. ೩೦. ೦. ೯. ೩೧. ೧೪. ೩೨. -೧೪.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩.

ಪು. ೨೯.

೧. ೨, ೩. ೨. ೩, ೨. ೩. ೧, ೩. ೪. ೧೦, ೮. ೫. -೧, ೨. ೬. ೧೦, -೬. ೭. ೩, ೨. ೮. ೨, ೮. ೯. ೫, ೬. ೧೦. ೮, ೪. ೧೧. ೨, -೧. ೧೨. ೧, -೧.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೪.

ಪು. ೩೦.

೧. ೩, ೨. ೨. ೧, ೨. ೩. ೧, ೩. ೪. ೨, ೨. ೫. ೨, ೬. ೨, ೧೦. ೭. ೫, -೩. ೮. ೨, ೨. ೯. ೩, ೨. ೧೦. ೫, ೪. ೧೧. ೨, -೧. ೧೨. ೨, ೨.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೫.

ಪು. ೩೨, ೩೩.

೧. ೨, ೧. ೨. ೩, ೨. ೩. ೪, ೨. ೪. ೩, ೨. ೫. ೪, ೩. ೬. ೫, ೨. ೭. ೩, ೨. ೮. ೫, ೧. ೯. ೨, ೨. ೧೦. ೬, ೨. ೧೧. ೨, ೩. ೧೨. ೨, ೧. ೧೩. ೬, ೨. ೧೪. ೫, -೩. ೧೫. ೨, ೨. ೧೬. ೫, ೩. ೧೭. ೫, ೧. ೧೮. ೨, -೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಪು. ೩೫, ೩೬.

೧. ೧, ೨. ೨. ೨, ೧. ೩. ೩, ೧. ೪. ೨, ೨. ೫. ೩, ೪. ೬. ೨, -೧.
 ೭. ೧, ೨. ೮. ೩, ೪. ೯. ೧, ೩. ೧೦. ೨೨, ೪. ೧೧. ೨, ೫. ೧೨. ೨, ೨.
 ೧೩. ೨, ೨. ೧೪. ೫, ೫. ೧೫. ೧, ೨. ೧೬. ೨, ೨. ೧೭. -೨, ೧.
 ೧೮. -೩, -೨. ೧೯. -೫, ೧. ೨೦. ೬, -೨. ೨೧. -೨, -೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭.

ಪು. ೩೯.

೧. ೩, ೨. ೨. ೨, ೧. ೩. ೧, ೨. ೪. ೪, ೫. ೫. ೨, ೩. ೬. ೨, ೧.
 ೭. -೨, ೧. ೮. ೧೦, ೨. ೯. -೩, -೨. ೧೦. ೫, ೨. ೧೧. ೧, ೨. ೧೨. ೨, ೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೮.

ಪು. ೪೧.

೧. ೨, ೫. ೨. ೧, ೨. ೩. ೩, ೨. ೪. ೫, ೩. ೫. ೨, ೧. ೬. ೨, -೧.
 ೭. ೨, ೨. ೮. ೨, -೨. ೯. ೮, -೨. ೧೦. -೨, -೩. ೧೧. ೨, ೨. ೧೨. ೨, ೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೯.

ಪು. ೪೫, ೪೬.

೧. ೪, ೬. ೨. ೧೨, ೪. ೩. ೧೬, ೨೦. ೪. ೮, ೨. ೫. ೯, ೩. ೬. -೩, -೧.
 ೭. ೭, ೨. ೮. ೫, ೮. ೯. ೨, ೩. ೧೦. ೧, ೨. ೧೧. ೩, ೪. ೧೨. ೪, ೬.
 ೧೩. ೧೦, ೫. ೧೪. ೦-೪, ೪. ೧೫. ೦-೨, ೦-೧. ೧೬. ೪, ೧. ೧೭. ೨, ೩.
 ೧೮. ೧, ೫. ೧೯. ೨, ೪. ೨೦. ೧, ೨. ೨೧. ೪, ೫. ೨೨. ೫, -೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

ಪು. ೪೭-೫೩.

೧. ೩೩, ೨೫. ೨. ೨೮, ೧೮. ೩. ೩೯, ೧೯. ೪. ೩೦ವ.; ೨೧ವ.
 ೫. ೨೯೦; ೧೦೯೪. ೬. ೮೦; ೬೪. ೭. ೫|| ರೂ.; ೭ ರೂ. ೮. ೨೮; ೩೨೮.
 ೯. ೧೨೦೦೦ ರೂ.; ೮೦೦೦ ರೂ. ೧೦. ೩೬ವ.; ೩೨ವ. ೧೧. ೪ ಮೈ.; ೧ ಮೈ.
 ೧೨. ೬೩. ೧೩. ೪೦ ಶೇರು; ೩೫ ಶೇರು. ೧೪. ೨|| ರೂ.; ೩ ರೂ. ೧೫. ೮ವ.;
 ೩೫ವ. ೧೬. ೪೮ರ; ೫೨ರ. ೧೭. ೧೦ ಶೇರು, ೫ ಶೇರು; ೧೫ ಶೇರು,
 ೧೦ ಶೇರು. ೧೮. ೨೫. ೧೯. ರಾಮ, ೧೩ ವರ್ಷ; ಗೋವಿಂದ, ೧೨ ವರ್ಷ.
 ೨೦. ೨೪. ೨೧. ೨೪; ೧೬. ೨೨. ೬೪; ೨೮; ೮. ೨೩. ೩೬; ೫೨.
 ೨೪. ೧೬೦೦೦ ರೂ.; ೨೪೦೦೦ ರೂ. ೨೫. ೪೦೦೦೦ ರೂ.; ೬೦೦೦೦ ರೂ.
 ೨೬. ೨೪; ೬೦. ೨೭. ೧೧೨|| ರೂ. ೨೮. ೩೦೨೪ ರೂ. ೨೯. ೪೦ವ.; ೨೫ವ.
 ೩೦. ೧೮; ೧೪. ೩೦. ೬೫°; ೬೫°; ೫೦°. ೩೨. ೫೦೮. ೩೩. ೧೬ವ.; ೬೪ವ.
 ೩೪. ೭೨; ೪೨.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

ಪು. ೬೦-೬೩.

೧. $\kappa = \frac{(ಪ+ಬ)ಲ}{೨}$; ೬೭೨ ಚೌ. ಇಂ., $ಲ = \frac{೨\kappa}{ಪ+ಬ}$; ೬ ಇಂ. ೨. $\kappa = ತವ$;

೧೨೦ ಚೌ. ಇಂ.; $ತ = \frac{\kappa}{೨}$. ೩. $\kappa = ೬ಬ$; ೧೩೨ ಚೌ. ಪೂ.; $ಬ = \sqrt{\frac{\kappa}{೬}}$;

೧೩೩ ಪೂ. ೪. $ಘ = \pi$ ಎತ; ೧೨೮ π ಘ. ಇಂ.; $ಎ = \frac{ಘ}{\pi ತ}$; ೬ ಇಂ.

೫. $\kappa = ೨\pi$ ಎತ; $ಪ = ೨\pi$ ತ(ಎ+ತ); ೬೪ π ಚೌ.ಇಂ.; ೯೬ π ಚೌ.ಇಂ.;
 $ಎ = \frac{\kappa}{೨\pi ತ}$; $ಎ = \frac{ಪ}{೨\pi ತ} - ತ$; ೧೩೨ ಚೌ. ಇಂ. ೨೦೯ ಚೌ. ಇಂ.

೬. ೨೮೮೦; $ಸ = \frac{೬೩೩೬೦೮}{\pi ವ್ಯಾ}$. ೭. $ತ = \frac{೨\kappa}{ಎ}$; $ಎ = \frac{೨\kappa}{ತ}$; ೬ ಇಂ.; ೭ ಇಂ.

೮. $ಉ = \frac{ಘ}{ಎಅ}$; $ಅ = \frac{ಘ}{ಉಎ}$; $ಎ = \frac{ಘ}{ಉಅ}$; ೧೮ ಇಂ. ೯. $ಅ = ೧೬ಕ$;

೧೪೪ ಪೂ. ೧೦. $ಪ = ೬೦ + ೫ನ$; ೧೪೦ ರೂ.; $ವ = \frac{ಪ}{೫} - ೧೨$; ೧೨ವ.

೧೧. $\kappa = ೨\pi$ ಅತ + π ಅ; ೪೭೭೪ ಚೌ. ಪೂ.; $ತ = \frac{\kappa - \pi ಅ}{೨\pi ಅ}$;

೧೪೦ ಪೂ. ೧೨. ೨೩೪; $ಪ = \frac{೨ಬ + ಸ - ಸ²}{೨ಸ}$.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಪು. ೭೦.

೧. ಪ^೩ + ೧೫ಪ^೨ಮ + ೭೫ಪಮ^೨ + ೧೨೫ಪ^೩. ೨. ೬೪ಕ^೩ + ೪೮ಕ^೨ಗ
 + ೧೨ಕಗ^೨ + ಗ^೩. ೩. ೨೭ಪ^೩ - ೨೭ಪ^೨ಮ + ೯ಪಮ^೨ - ಮ^೩.
 ೪. ಯ^೩ - ೬ಯ^೨ರ + ೧೨ಯರ^೨ - ೮ರ^೩. ೫. ೨೭ಪ^೩ + ೫೪ಪ^೨ಮ
 + ೩೬ಪಮ^೨ + ೮ಮ^೩. ೬. ೬೪ಯ^೩ - ೧೪೪ಯ^೨ರ + ೧೦೮ಯರ^೨ - ೨೭ರ^೩.
 ೭. ೨೧೬ಪ^೩ - ೫೪೦ಪ^೨ರ + ೪೫೦ಪರ^೨ - ೧೨೫ರ^೩. ೮. ೩೪೩ಪ^೩
 + ೨೯೪ಪ^೨ಬ + ೮೪ಪಬ^೨ + ೮ಬ^೩. ೯. ೬೪ಯ^೩ + ೨೪೦ಯ^೨ + ೩೦೦ಯ
 + ೧೨೫. ೧೦. ೨೭ಪ^೩ - ೫೪ಪ^೨ + ೩೬ಪ - ೮. ೧೧. ಬ^೬ + ೩ಬ^೪
 + ೩ಬ^೨ + ೧. ೧೨. ೨೭ - ೫೪ಯ^೨ + ೩೬ಯ^೪ - ೮ಯ^೬. ೧೩. ೮ಪ^೬

+೬೦ಪಳಿಬ+ಗಂಜಂಪಳಿಬ+ಗಂಜಿಬಳಿ. ೧೪. ೫೧೨-೫೭೬ಮೃ+೨೧೬ಮಳಿ
-೨೭ಮೃ. ೧೫. ೨೭ಮೃ+೫೪ಮೃ+೩೬ಮೃ+೮. ೧೬. ಪೃ-೧೨ಪೃಬಳಿ
+ ೪೮ಪಬಳಿ-೬೪ಪಬಳಿ. ೧೭. ೬೪ಯೃ-೧೨ಯೃಲ+೫೪ಯೃಲ-೬೪ಲೃ.
೧೮. ೧೫ - ೧೫೧ + ೫೫೧ - ೧೫೫೧. ೧೯. ೨೭ + ೧೮ಯ + ೪ಯೃ
+ ೫೪ಯೃ. ೨೦. ಪೃ + ಪೃಬಳಿ + ೫೫೫೫ಬಳಿ + ೫೫೫೫. ೨೧. ೯೧೧೫.
೨೨. ೬೫೮೫೦೩. ೨೩. $\frac{೧೯೬೮೩}{೧೨೫}$. ೨೪. $\frac{೩೫೭೯೧೧}{೫೧೨}$. ೨೫. ಯ + ೫.
೨೬. ಕ್ಷ - ೭. ೨೭. ೨೮ - ೫೪. ೨೮. ೬೮ - ೭ಮ. ೨೯. ೪೮ - ೩೮.
೩೦. ೯೮ + ೫೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಪು. ೭೩, ೭೪.

೧. ಯೃ + ೧೫. ೨. ಯೃ - ೩೪೩. ೩. ೮ಯೃ + ೨೭. ೪. ೨೭೮೩
- ೧೫. ೫. ೧೫ - ೬೫ಕೃ. ೬. ೭೨೯ + ೮ಕೃ. ೭. ೧೫ಕೃ - ೧೫.
೮. ೫೧೨ಯೃ - ೧೫ಕೃ. ೯. ೩೪೩ಕ್ಷ - ೫೫. ೧೦. ೨೭ಕ್ಷ + ೫೫.
೧೧. ೧ + ೬೪೫೫. ೧೨. ೫೫೫ - ೫೫ ಬಳಿ. ೧೩. ೬೪ಯೃಕ್ಷ + ೧.
೧೪. ೨೭ - ೬೪೫೫ಬಳಿ. ೧೫. ೮೫೫೫ - ೨೭ಬಳಿಮೃ. ೧೬. ೫೧೨ಯೃ
+ ೧೩೩೧೮೩ಲೃ. ೧೭. ೨೭ಯೃ + ೧೫೫ಕ್ಷ. ೧೮. ೮ಯೃ - ೨೭ಕ್ಷ.
೧೯. ೧೫೫೫ + ೩೪೩ಬಳಿ. ೨೦. ೮೫೫ - ೭೨೯ಬಳಿ. ೨೧. ೧೬ಯೃ
- ೨೦ಯೃಲ + ೫೫ಲೃ. ೨೨. ೩೮ - ೭೮. ೨೩. ೫೫ + ೪೫೫ + ೮೫೫.
೨೪. ೧೫ಯ + ೬೮೮. ೨೫. ೪೫೫ + ೫೬ಪಕ್ಷ + ೬೪ಕ್ಷ. ೨೬. ೪ಯೃ
+ ೧೫ಯೃಲ + ೪೫ಲೃ. ೨೭. ೯೮ - ೧೫೮೮ + ೫೫ಲೃ. ೨೮. ೧-೬ಯೃ.
೨೯. ೧೦೦ಕ್ಷ - ೯೦ಕ್ಷ + ೮೧. ೩೦. ೬ಯೃಕ್ಷ-೫೫. ೩೧. ೮೫-೭೮.
೩೨. ೧೧೮ + ೫೫. ೩೩. ೪ಯೃ-೯೮. ೩೪. ೨೭ಕೃ - ೫೧೫. ೩೫. ೧೫ಯೃ + ೩೪೩ಕ್ಷ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಪು. ೭೬.

೧. ಯೃ+೧೫ಯೃ+೫೦ಯೃ+೫೬. ೨. ಯೃ-೯ಯೃ+೨೩ಯೃ-೧೫.
೩. ಕ್ಷ+೩ಕ್ಷ-೬ಕ್ಷ-೮. ೪. ಮೃ-೯ಮೃ+೧೧ಮೃ+೨೧. ೫. ಪೃ-೩೧ಪ
+ ೩೦. ೬. ೩೨ + ೪೪ಯೃ + ೧೩ಯೃ + ೫೫. ೭. ೨೧೦-೧೨೧ಕ್ಷ+೨೦ಕ್ಷ
- ಕ್ಷ. ೮. ೮ಯೃ+೩೬ಯೃ + ೪೬ಯೃ + ೧೫. ೯. ೨೭ಕ್ಷ - ೯೯ಕ್ಷ.

+ ಗಂಭಿರ - ೪೦. ೧೦. ೬೪ಕ್ಷಿ + ಗಂಭಿರ + ೪೦ಕ್ಷ - ೨೧. ೧೧. ೧೨೫ಕ್ಷಿ
 - ೨೦೦ಕ್ಷಿ + ೪೫ಕ್ಷ + ೧೮. ೧೨. ೩೪೩ಕ್ಷಿ - ೨೧೭ಕ್ಷ + ೩೦. ೧೩. ೮೫ಕ್ಷಿ
 - ೨೬ಕಕ್ಷಿ + ೧೨ಕಕ್ಷಿ. ೧೪. ೬೪ಪಕ್ಷಿ - ೧೬ಕಪಕ್ಷಿ - ೧೬೪ಕಪಕ್ಷಿ + ೧೦೫ಕಕ್ಷಿ.
 ೧೫. ೩೬ಗಕ್ಷಿ + ೩೬ಗಕ್ಷಿಯ + ೧೧ಗಯ್ + ಯಕ್ಷಿ. ೧೬. ೧೬೦ನಕ್ಷಿ - ೯೨ನಕ್ಷಿಯ
 + ೧೭ನಯ್ - ಯಕ್ಷಿ. ೧೭. ೧೨೫ಯಕ್ಷಿ + ೨೫(೩ಕ + ೧೪ಗ)ಯ್ + ೫
 (೪೨ಕಗ + ೪೮ಗ)ಯ್ + ೧೪೪ಕಗ. ೧೮. ೫೧೨ಯ್ + ೬೪(೩ಗ - ೫ಘ - ಕ)ಯ್
 + ೮ (೫ಕಘ - ೩ಕಗ - ೧೫ಗಘ) ಯ್ + ೧೫ಕಗಘ. ೧೯. ೫೬ಪಬಮ
 + ೩(೮ಪಬ + ೧೪ಪಮ + ೨೮ಬಮ)ಯ್ + ೯(೨ಪ + ೪ಬ + ೭ಮ)ಯ್ + ೨೭ಯ್.
 ೨೦. ೧೫ಪಕ್ಷಿ - ೯೨ಪಕ್ಷಿಯ + ೧೪೪ಪಯ್ - ೬೪ಯ್.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಪು. ೭೯, ೮೦.

೧. ೨೫ಯ್ + ೧೨೦ಯ್ + ೧೪೪. ೨. ೮೧ಯ್ - ೧೭೬ಯ್ + ೪೯.
 ೩. ೨೫ಪಕ್ಷಿ + ೬೦ಪಬ + ೪ಬ. ೪. ೩೨೪ಪಕ್ಷಿ - ೧೮೦ಪಮ + ೨೫ಮ. ೫.
 ೧೬ಯ್ + ೨೫ರಕ್ಷಿ + ೪೪ರಕ್ಷಿ + ೪೦ಯರ + ೨೦ರಲ + ೧೬ಯಲ. ೬. ೯ಯ್
 + ೪೯ರಕ್ಷಿ + ೧೬ಲಕ್ಷಿ - ೪೨ಯರ - ೫೬ರಲ + ೨೪ಯಲ. ೭. ೪ಕಕ್ಷಿ + ೨೫ಗಕ್ಷಿ + ೯ಘ
 - ೨೦ಕಗ + ೩೦ಗಘ - ೧೨ಕಘ. ೮. ೯ಪಕ್ಷಿ + ೪೨ಪಬ + ೪೯ಬಕ್ಷಿ + ೧೨ಪ
 + ೨೮ಬ + ೪. ೯. ೧೬ಕಕ್ಷಿ - ೨೪ಕಗ + ೯ಗಕ್ಷಿ + ೫೬ಕ - ೪೨ಗ + ೪೯. ೧೦. ೪೯ಪಕ್ಷಿ
 - ೨೮ಪಬ + ೪ಬಕ್ಷಿ - ೧೪ಪ + ೪ಬ + ೧. ೧೧. ೯ - ೨೪ಯ - ೩೦ಕ್ಷ + ೧೬ಯ್
 + ೪೦ಯಕ್ಷ + ೨೫ಕ್ಷಿ. ೧೨. ೪ - ೩೨ಯ + ೧೨ಕ್ಷ + ೬೪ಯ್ - ೪೮ಯಕ್ಷ
 + ೯ಕ್ಷಿ. ೧೩. ಯಕ್ಷಿ + ೨ಯ್ + ೩ಯ್ + ೨ಯ + ೧. ೧೪. ಕ್ಷಿ + ೪ಕ್ಷಿ
 + ೬ಕ್ಷಿ + ೪ಕ್ಷ + ೧. ೧೫. ಪಕ್ಷಿ - ೮ಪಕ್ಷಿ + ೨೪ಪಕ್ಷಿ - ೩೨ಪ + ೧೬.
 ೧೬. ಪಕ್ಷಿ + ೪ಪಕ್ಷಿಬ + ೮ಪಕ್ಷಿಬಕ್ಷಿ + ೮ಪಕ್ಷಿಬಕ್ಷಿ + ೪ಬಕ್ಷಿ. ೧೭. ಯಕ್ಷಿ - ೬ಯ್
 + ೧೫ಯ್ - ೧೮ಯಕ್ಷಿ + ೯ಕ್ಷಿ. ೧೮. ೧೬ + ೧೬ಯ + ೧೨ಯ್
 + ೪ಯ್ + ಯಕ್ಷಿ. ೧೯. ೬೪ - ೬೪ಯ + ೬೪ಯ್ - ೨೪ಯ್ + ೯ಯ್.
 ೨೦. ಯಕ್ಷಿ + ೨ಯ್ - ೨ಯ್ + ೨ಯ್ + ೨ಯ್ + ೧೬. ೨೧. ಮಲ - ೨ಮಲ
 - ಮಲ + ೨ಮಲ + ೧. ೨೨. ಪ + ೩ಬ + ೪ಮ. ೨೩. ೨ಕ - ೨ಖ + ೩ಗ.
 ೨೪. ೫ಪ - ೨ಬ - ೩ಮ. ೨೫. ೪ಯ - ೮ + ೨೮. ೨೬. - ೫ಲ; ೪ಯ್
 + ೯ರಕ್ಷಿ + ೧೨ಯರ - ೩೦ರಲ. ೨೭. - ೨ಬ - ಮ; ೯ಪಕ್ಷಿ - ೬ಪಮ, ೨೮. ೨ಕ

+೩ಘ; +ಗೃಗೌ-೨೪ಗಘ. ೨೯. ಖಪೌ+ಖಬೌ+ಖಮೌ-೨೨ಬಮ-೪ಪಮ. ೩೦. ಁಯೌ-೯ರೌ+ಫಲೌ-೬ಯರ-೪ಫರಲ+ಗೃಯಲ. ೩೧. ೬ಕೌ+ಗಫಗೌ+ಗಫಘೌ+೨೦ಕಗ-ಫಂಗಳಘ+೨೪ಕಘ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಪು. ೮೪.

೧. ಕೌ+೨ಕಗ+ಗೌ-ಘೌ. ೨. ಕೌ+೨ಕಘ+ಘೌ-ಗೌ. ೩. ಕೌ-ಗೌ+೨ಗಘ-ಘೌ. ೪. ಕಪೌ+೨೪ಪಮ+ಗೃಮೌ-ಬೌ. ೫. ಖಪೌ-೪ಬೌ+೪ಬಮ-ಮೌ. ೬. ಁಯೌ-ಗ೨ಯಲ+೯ಲೌ-ಗೃರೌ. ೭. ೯ಕೌ-೪೯ಗೌ+ಗ೧೨ಗಘ-೬೪ಘೌ. ೮. ೪೯ಲೌ-೨೫ಯೌ+೩೦ಯರ-೯ರೌ. ೯. ಯೌ-೪ಯೌರೌ-೮ಯರೌ-೪ರೌ. ೧೦. ೯ಯೌ-೭ಯೌಲೌ+೮ೌ. ೧೧. ಖಪೌ-೯ಪೌಬೌ+ಗ೨ಪಬೌ-೪ಬೌ. ೧೨. ೯ಗೌ-೪೯ಕೌಗೌ+೮೪ಕೌಗ-೩೬ಕೌ. ೧೩. ಯೌ+ಯೌ+ಗ. ೧೪. ಗೃಯೌ+೪ಯೌ+ಗ. ೧೫. ೮ಗಪೌ+೯ಪೌ+ಗ. ೧೬. ಖೃಪೌ+ಗ೪ಫಪೌ+೮ಗ. ೧೭. ೬೨ಖಪೌ+೨ಖಪೌಬೌ+ಬೌ. ೧೮. ಗೃಯೌ+ಗ೦೦ಯೌಕ್ಷೌ+೬೨ಖಕ್ಷೌ. ೧೯. ಖಯೌ-೪ಯೌ+ಗೃಯೌ-ಗೃ. ೨೦. ೬೪ಕ್ಷೌ+೪೮ಕ್ಷೌ-ಗೃಯೌ+೯. ೨೧. ಁಯೌ-ಗೃಯೌ+೬೪ಯೌ-೨೫ಯೌ+೩೬. ೨೨. ಕ್ಷೌ-೪ಕ್ಷೌ+೨೪ಕ್ಷೌ-೬೪ಕ್ಷೌ+೮೪ಕ್ಷ-೪೯. ೨೩. ೯ಕ್ಷೌ-೪೯ಕ್ಷೌ+ಗ೨೬ಕ್ಷೌ-೮ಗ. ೨೪. ೪ಕೌ-೨೫ಖೌ-೪೯ಗೌ-೬೪ಘೌ+೭೦ಖಗ+ಗ೧೨ಗಘ+೮೦ಖಘ. ೨೫. ಖೃಪೌ+ಗ೨೯ಪೌ+೬೫೬ಗ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೭.

ಪು. ೮೯.

೧. ಕೌ-ಗೌ+ಘೌ-೩ಕಗ(ಕ-ಗ)+೩ಗಘ(ಗ-ಘ)+೩ಕಘ(ಕ+ಘ)-೬ಕಗಘ. ೨. ತೌ-ದೌ-ನೌ-೩ತದ(ತ-ದ)-೩ದನ(ದ+ನ)-೩ತನ(ತ-ನ)+೬ತದನ. ೩. ಲಕೌ+೨೭ಗೌ-ಘೌ+೧೮ಕಗ(೨ಕ+೩ಗ)-೯ಗಘ(೩ಗ-ಘ)-೬ಕಘ(೨ಕ-ಘ)-೧೮ಕಗಘ. ೪. ೧೨೫ಕೌ-೨೭ಗೌ-೮ಘೌ-೪೫ಕಗ(೫ಕ-೩ಗ)-೧೮ಗಘ(೩ಗ+೨ಘ)-೩೦ಕಘ(೫ಕ-೨ಘ)+೧೮೦ಕಗಘ. ೫. ಲತೌ-೧೨೫ದೌ+೨೭ನೌ-೩೦ತದ(೨ತ-೫ದ)+೪೫ದನ(೫ದ-೩ನ)+೧೮ತನ(೨ತ+೩ನ)-೧೮೦ತದನ. ೬. ಫೌಪೌ-ಬೌ-೨೭ಮೌ-೨೪ಪಬ(೮ಪ-ಬ)-೯ಬಮ(ಬ+೩ಮ)-೭೨ಪಮ(೮ಪ-೩ಮ)+೧೪೪ಪಬಮ.

೭. ಪಃ - ಬಃ - ಲೋಮಃ - ಇವಬ(ಪ - ಬ) - ಲಬಮ(ಬ + ಲಮ)
 - ಲಪಮ(ಪ - ಲಮ) + ಚಲಪಬಮ. ೮. ಲಪಃ-ಬಃ+ಲೋಮಃ-ಓಪಬ
 (ಲಪ-ಬ)+ಲಬಮ(ಬ-ಓಮ)+ಲಪಮ(ಪ+ಲಮ)-ಲಪಬಮ. ೯. ಲಕಃ
 -ಇಳಿಗಃ-ಓಕಗ(ಕ-ಒಗ)+ಲಚಕ(ಕ+ಚ)+ಲಂಚಗ(ಒಗ-ಚ)-ಓಲಂಚಗ
 +ಲಂಚ. ೧೦. ಲ-ಲಂಚಪಃ+ಲೋಬಃ-ಲಂಪ(ಲ-ಚಪ)+ಲಬ(ಲ+ಓಬ)
 +ಲಂಪಬ(ಚಪ-ಓಬ)-ಲಂಪಬ. ೧೧. ಪಃ-ಇಪಃ+ಓಪಃ-ಒಪಃ+ಓಪಃ
 -ಇಪ+ಲ. ೧೨. ಲಪಃ-ಲಲಪಃ+ಓಲಪಃ+ಲಂಪಃ-ಲಂಪಃ-ಲಂಪ-ಒಲ.
 ೧೩. ಲ+ಓಲಪ+ಲಲಪಃ+ಓಲಪಃ-ಓಲಪಃ+ಲಲಪಃ-ಪಃ. ೧೪. ಲ-ಚಲಪ
 -ಒಲಪಃ-ಲಪಃ+ಓಲಪಃ-ಓಲಪಃ-ಓಲಪಃ. ೧೫. ಪಃ+ಇಪಃಬ-ಚಪಃಬ
 +ಇವಬಃ - ಬಃ. ೧೬. ಲಪಃ - ಚಲಪಃಬ + ಓಲಪಃಬ - ಲಲಪಃಬ
 + ಲಂಪಃಬ - ಓಲಪಃಬ + ಬಃ. ೧೭. ಓಲತಃ - ಓಲತಃದ - ಓಲತಃದ
 +ಲಲತಃದ+ಒಲತಃದ-ಚಲತಃದ-ಒಲತಃ. ೧೮. ಪಃ+ಲಪಃ+ಓಲಪಃ
 +ಒಲಪಃ+ಲಲಪಃ+ಓಲಪಃ+ಒಲಪಃ+ಲಪಃ+ಲ. ೧೯. ಲಪಃ-ಲಲಪಃ+ಓಲಪಃ
 -ಲಂಪಃ+ಲಲಪಃ-ಲಲಪಃ+ಚಲಪಃ-ಲಂಪಃ-ಒಲ. ೨೦. ಓಲಕಃ
 -ಲಲಕಃ+ಲಲಕಃ-ಲಲಕಃ+ಲಲಕಃ-ಚಲಕಃ+ಒಲ. ೨೧. ಲಕಃ
 -ಓಲಕಃ+ಲಲಕಃ+ಲಕಃ - ಲಲಕಃ - ಲಕಃ - ಲ. ೨೨. ಲಚ-ಲಂಪಃ
 +ಲಲಪಃ - ಲಲಪಃ + ಲಲಪಃ - ಚಲಪಃ + ಒಲಪಃ. ೨೩. ಲಪಃ
 +ಲಲಪಃಬ + ಚಲಪಃಬ + ಲಲಪಃಬ + ಲಲಪಃಬ + ಲಲಪಃಬ + ಲಲಪಃಬ
 + ಓಲಬಃ. ೨೪. ಯಃ - ಓಯಃಕ್ಷ + ಲಲಯಃಕ್ಷ - ಓಯಃಕ್ಷ
 +ಓಲಯಃಕ್ಷ-ಒಲಯಃಕ್ಷ+ಲಕ್ಷಃ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ಲಃ.

ಪು. ೯೭.

೧. ಚ(ಯ+ಕ್ಷ). ೨. ಒ(ಪ+ಮ). ೩. ಲ(ಕ+ಗ). ೪. ಲ(ರ+ಲ).
 ೫. ಒ(ಪ-ಬ). ೬. ಲ(ಪ-ಮ). ೭. ಲ(ಯ-ಕ್ಷ). ೮. ಒ(ಯ+ಒಕ್ಷ).
 ೯. ಒ(ಯ-ಒಪ). ೧೦. ಒ(ಕ-ಒಗ). ೧೧. ಲ(ಯ+ಒಕ್ಷ). ೧೨. ಲ(ಯ
 -ಒಕ್ಷ). ೧೩. ಒ(ಒಪ+ಒಬ). ೧೪. ಒ(ಲಬ-ಒಮ). ೧೫. ಒ(ಒಕ-ಚಗ).
 ೧೬. ಒ(ಚಯ+ಒಕ್ಷ). ೧೭. ಚ(ಚಪ-ಒಮ). ೧೮. ಒ(ಲಕ+ಲಗ). ೧೯. ಲ
 (ಒಪ+ಒಬ). ೨೦. ಲ(ಒಲಯ-ಒಕ್ಷ). ೨೧. ಲ(ಒಯ-ಒ). ೨೨. ಲ(ಚಕ್ಷ

+೨). ೨೩. ಉ(೩+೭ಮು). ೨೪. ಗ೩(೩-ಉನ). ೨೫. ೨೮(ಯ+ಕ್ಷ).
 ೨೬. ಜ೮(ಯ-ರ). ೨೭. ೩೮(ಯ+೩ಕ್ಷ). ೨೮. ೨೮(ಉಪ-ಬ). ೨೯. ಜಕಗ
 (ಯ+೩ಕ್ಷ). ೩೦. ಕಗ(೭ಬ+೧ಗಮು). ೩೧. ೩ಕ(೨ಗಯ-ಜಘಕ್ಷ).
 ೩೨. ೧ಗಪಮ(೨ಬ-ಜಯ). ೩೩. ೭(ಯ+ರ+ಲ). ೩೪. ಜ(ಯ-ರ+ಕ್ಷ).
 ೩೫. ಉ(ಯ+ಲ+ಕ್ಷ). ೩೬. ಲ(ಪ-ಬ-ಮು). ೩೭. ೨(ಪ+೨ಬ+೩ಮು).
 ೩೮. ೩(೨ಕ+೩ಗ+ಘ). ೩೯. ಜ(೩ಯ+೨ಲ+ಜಕ್ಷ). ೪೦. ಉ(೨ತ-ದ+೩ನ).
 ೪೧. ೭(೨ಪ-೩ಬ+ಉಮು). ೪೨. ೩(೩ಯ-೬ರ-೨ಕ್ಷ). ೪೩. ಉ(೯ಕ-೬ಖ
 +ಉಗ). ೪೪. ೩(೭ತ+ಉದ-೧೬ನ). ೪೫. ೩೮(ಯ+ರ+ಲ). ೪೬. ಉಕ
 (ಪ-ಬ+ಮು). ೪೭. ೬ಗ(ಯ+ರ-ಕ್ಷ). ೪೮. ೯ಕ(ನ-ಪ-ಮು). ೪೯. ಜ೮
 (ಯ+೨ರ+ಜಲ). ೫೦. ೭ಕ(೨ಪ-೩ಬ+ಉಮು). ೫೧. ೨ನ(೬ಪ-೧ಜಬ
 -ಲಮು). ೫೨. ೩ಯ(೨ಕ+ಜಗ+ಉಬ). ೫೩. ಲಕ್ಷ(೨ಕ-ಗ+ಉಪ).
 ೫೪. ೩ಕಪ(೨ಯ-೧೦ಲ+೭ಕ್ಷ). ೫೫. ೨ಯಕ್ಷ(೧ಉಕ-೭ಗ-೩ಬ).
 ೫೬. ಉ(ಉಯ-೨ರ+೩ಲ-ಲಕ್ಷ). ೫೭. ಉ(೬ಯ-೧೨ರ-೧೮ಲ+ಉನ-ಜಕ್ಷ).
 ೫೮. ಜ(೩ಕಪ-ಜಗಘ-ಉಘಬ+೨ಖಮು). ೫೯. ಉ(೨ಕಯರ-೩ಗರಲ
 -ಜಘಲಯ). ೬೦. ಜಪಬ(ಉಕಮ-೩ಗಯ+೬ಘರ-ಜತಕ್ಷ). ೬೧. ಉ(ಉ-
 ಜಯ+೬ರ+ಲಲ-೨ಕ್ಷ). ೬೨. ೭(೨+ಜಕಯ-೩ಗರ-ಉಘವ+೭ಪಕ್ಷ).
 ೬೩. ೧೦೨೬೦೦. ೬೪. ಜ೬೦೦. ೬೫. ೨೧೩೦೦೦. ೬೬. ೨೬೭೩೦೦.
 ೬೭. ೬೫೬೦೦೦. ೬೮. ೧೨೯೬೦೦. ೬೯. ಉ೨೮೦೦. ೭೦. ೧೦೨೪೦೦.
 ೭೧. ೬೦೦. ೭೨. ೧೮೯. ೭೩. ೬೪. ೭೪. ೮೧. ೭೫. ೨೨೨. ೭೬. ೧೬೨.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೯.

ಪು. ೯೯.

೧. ಯಕ್ಷ(ಯ+ಕ್ಷ). ೨. ೬ಪಬ(ಪ+ಬ). ೩. ಉಕಗ(ಕ+೩ಗ).
 ೪. ಉಪಮ(ಉಪ+೩ಮು). ೫. ಪಘ(ಪ-ಘ). ೬. ಜ೮ಕ್ಷ(೮-ಕ್ಷ).
 ೭. ೩ಪೌಘೌ(ಪ-೭ಘ). ೮. ೩ಯೌರೌ(೩ಯೌ-ಲರೌ). ೯. ಕಗಘ
 (ಕ+ಗ+ಘ). ೧೦. ಯರಕ್ಷ(ಯೌ+ರೌ+ಕ್ಷೌ). ೧೧. ಯರಕ್ಷ(ಯರ
 -ರಕ್ಷ+ಕ್ಷ). ೧೨. ಉಯಕ್ಷ(೨ಯೌ-ಜಯಕ್ಷ-೩ಕ್ಷೌ). ೧೩. ಜಯೌರೌಲೌ
 (ಉಯ-ಲರ+೩ಲ). ೧೪. ಉ(೬ಪಬೌ+೩ಬಮೌ-೭ಮಬೌ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಪು. ೧೦೧, ೧೦೨.

೧. (ಕ+ಘ)(೨ಯ+೫ರ). ೨. (ಋತ+೨ನ)(೪ಯ-೭ರ). ೩. (೨ಪ-೩ಮ)
 (೨ಯ+೭ವ). ೪. (ಉಕ-೩ಘ)(೩ಪ-೫ಮ). ೫. (ಯ-೪ವ)(ಯ+ವ).
 ೬. (೫ಯ+೪ರ)(೨ಯ-೭ರ). ೭. (ಯ-೮)(೩ಯ-೧೧). ೮. (೮-೩ರ)
 (೧೨+೫ರ). ೯. (ದ+ಧ+ನ)(೨ಯ-೫ರ). ೧೦. (೨ದ-೫ಧ+೭ನ)
 (೪ಯ+೭ವ). ೧೧. (ದ+ನ)(೩ಪ+೪ಘ-೭ಮ). ೧೨. (೫ದ-೭ನ)(೨ಪ-೪ಘ
 -೩ಮ). ೧೩. (ತ-ದ+ನ)(ಯ+ರ-ವ). ೧೪. (೫ತ+೭ದ-೯ನ)(೨ಯ
 -೪ರ-೭ಲ). ೧೫. (ಯ-೫)(೬ಯ-೯ಯರ+೪ರ). ೧೬. (೨ಯ-೭)
 (೩ಯ+೭ಯರ-೯ರ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಪು. ೧೦೨, ೧೦೩.

೧. (ಅ+ಪ)(ಯ+ರ). ೨. (ಪ-ಮ)(೨ಯ-೬). ೩. (೨ಕ-೧)
 (ಪ+ಮ). ೪. (೪ತ+೩ದ)(೨ಪ-ಮ). ೫. (ಉಕ-೩ಗ)(೪ಯ-೫ಘ).
 ೬. (೨ಪ-೭ಮ)(೪ಯ+೩ರ). ೭. (ಗ-೪ಜ)(೩ಪ-೪ಮ). ೮. (೬ದ-೫ನ)
 (೩ಪ+೨ಮ). ೯. (೫ಕ+೨ಜ)(೨ರ+೭ಲ). ೧೦. (೩ಅ-೨ಜ)(೫ಪ-ಮ).
 ೧೧. (೪ಪ-ಬ)(೨ಲ+೫ವ). ೧೨. (೩ಮ+೨)(೪ಯ-೩ವ). ೧೩. (೮ಪ
 -೩ಮ)(೨ಯ-೫). ೧೪. (೭ಕ-೨)(೪ರ+ಲ). ೧೫. (೩ತ+೪)(೨ವ-೬).
 ೧೬. (ಕ+೫)(ಗ+೬). ೧೭. (ಯ-೩)(ರ-೮). ೧೮. (ಪ+೬)(ಬ-೭).
 ೧೯. (ಜ-೧೧)(ನ+೮). ೨೦. (೨ಪ-೭)(೩ಯ-೪). ೨೧. (೮ಯ+೭)
 (೨ರ-೩). ೨೨. (ಅ+೨ಕ)(ಅ+೪ಗ). ೨೩. (ಮ+೫ಯ)(ಬ-೩ಯ).
 ೨೪. (ರ-೪ಪ)(೨ರ+೩ಬ). ೨೫. (೨ಯ-೫ಪ)(೩ಯ-೨ಮ). ೨೬. (೮ಯ
 +೫ಪ)(೨ಯ+ಬ). ೨೭. (೭ಯ-೨ಕ)(೨ಯ+೭ಗ). ೨೮. (ಪ-ಬ-ಮ)
 (ಯ-೬). ೨೯. (ಕ-ಗ+ಘ)(ಯ+೬). ೩೦. (ಅ-ಯ)(ಪ-೨ಬ+೩ಮ).
 ೩೧. (೨ಯ-೫ಘ)(೨ಪ+೫ಬ-ಮ). ೩೨. (ಯ-೨ಅ)(ಯ-೪ಕ-೩ಗ).
 ೩೩. (೨ಪ+೩ಬ-ಮ)(ಯ-೨ಲ+ವ). '೩೪. (ಯ-ಕ+೨ಘ)(ಯ-೪ಪ
 +೩ಮ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಪು. ೧೧೫, ೧೧೬.

೧. ಯ-೬. ೨. ೨ರ+೫. ೩. ೪ಲ+೭. ೪. ೫ನ-೭. ೫. ೯-ರ.
 ೬. ೮+೩ಘ. ೭. ೫ಪ+೨ಮ. ೮. ೬ಯ-೭ಲ. ೯. ೧೧ಪ-೯ರ.

೧೦. ಓಪ+ಗಂಮ. ೧೧. ಓಪ+ಳಬ. ೧೨. ೧೨ಪ-ಜಮ. ೧೩. ಉಯ-ಫರ.
 ೧೪. ೧೦ರ-ಓಲ. ೧೫. ೧೧ಪ-ಜಮ. ೧೬. ಓಯ-ಓರ. ೧೭. ೧೮. ಇಲ್ಲ.
 ೧೯. ಓ+ಗಂಮ. ೨೦. ಫನ+ಗುಕ್ತ. ೨೧. ಅಜಯ-ಳಕ್ಷ. ೨೨. ಡ್ರಿ-ಳುಕ್ತ.
 ೨೩. ಉಪ-ಓಮ. ೨೪. ಜಲ+ಓಕ. ೨೫. ಓಕ+ಓಮ. ೨೬. ೨ರ-
 -ಜಲ. ೨೭. ಓಯ-ಓಕ್ಷ. ೨೮. ಯ+ರ. ೨೯. ಫಪ+ಮ.
 ೩೦. ಉ(ಪ+ಮ)+ಜ(ಯ+ರ). ೩೧. ಅಯ+ಗರ+ಫಲ. ೩೨. (ಜಯ
 +ಓರ)(ಜಯ+ಓರ-೧). ೩೩. (೨ರ-ಜಲ)(೨ರ-ಜಲ-೨). ೩೪. (ಉಪ
 -ಓಮ)(ಉಪ-ಓಮ-೪). ೩೫. (ಯ+ಓ)(ಯ+ಓ+೩). ೩೬. (ಓಕ್ಷ-೨ಕ)
 (ಓಕ್ಷ-೨ಕ-೨). ೩೭. (ಜರ-ಓಪ)(ಜರ-ಓಪ-೨ಕ).

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಪು. ೧೨೦.

೧. (ಪ-ಳ)(ಪ+ಳ). ೨. (ಜ-ಮ)(ಜ+ಮ). ೩. (ಓಪ-ಫಮ)(ಓಪ
 +ಫಮ). ೪. (ಉಪ-ಓಕ)(ಉಪ+ಓಕ). ೫. (೧೪ಯ-೧೧ರ)(೧೪ಯ+೧೧ರ).
 ೬. (೧೫ಯ-೧೩ಲ)(೧೫ಯ+೧೩ಲ). ೭. (೧೨ರ - ಫಸ)(೧೨ರ + ಫಸ).
 ೮. (ಉಮ-೧೫ನ)(ಉಮ+೧೫ನ). ೯. (೧೯ಪ-೧೦ಕ)(೧೯ಪ+೧೦ಕ).
 ೧೦. (ಫತ-೨೦ದ)(ಫತ+೨೦ದ). ೧೧. (ಓಯ-ಫಲ)(ಓಯ+ಫಲ).
 ೧೨. (೧೯ರ - ಫಸ)(೧೯ರ+ಫಸ). ೧೩. (ಅಪ - ಓಗಫ)(ಅಪ+ಓಗಫ).
 ೧೪. (೧೦ಕ - ಓಗ)(೧೦ಕ+ಓಗ). ೧೫. (೧೫ಕ-೧೪ಜ)(೧೫ಕ+೧೪ಜ).
 ೧೬. ೨(ಓನ-ಓಮ)(ಓನ+ಓಮ). ೧೭. ಜ(ಅಮ-ಜಯ)(ಅಮ+ಜಯ).
 ೧೮. ಓ(ಓಯ-ಜರ)(ಓಯ+ಜರ). ೧೯. ಉ(ಜಪ - ಓಬ)(ಜಪ+ಓಬ).
 ೨೦. ೧೬(ಅಪ-ಓಮ)(ಅಪ+ಓಮ). ೨೧. (ಜಪ - ಓಭ)(ಜಪ+ಓಭ).
 ೨೨. (ಓಕ - ಓಗ)(ಓಕ+ಓಗ). ೨೩. (ಓಯ - ಓರ)(ಓಯ+ಓರ).
 ೨೪. (ಓ - ಓ)(ಓ+ಓ). ೨೫. (ಓಪ-ಜಮ)(ಓಪ+ಜಮ).
 ೨೬. (ಯ - ಫಮ)(ಯ+ಫಮ). ೨೭. (ಓಪ-ಫಮ)(ಓಪ+ಫಮ).
 ೨೮. ೧೦೦(ಓಕಯ - ಅಸ)(ಓಕಯ+ಅಸ).
 ೨೯. ಓ(ಓಪರ-ಉಲ)(ಓಪರ+ಉಲ). ೩೦. ಓತ(ಜಪ-ಳಮ)(ಜಪ+ಳಮ).
 ೩೧. ಓನ(ಉಯ - ಓಲ)(ಉಯ+ಓಲ).

(೧೨ದೊ + ನೊ). ೨೯. ಕ(೭ಕೊ + ೧೮ಕಗ + ೧೨ಗೊ). ೩೦. (ಯೊರ)
 (೩೭ಯೊ - ೭೩ಯರ + ೩೭ರೊ). ೩೧. (ಕ - ಗ)(ಕೊ + ಕಗ + ಗೊ + ಜ).
 ೩೨. (೨ಯೊ-ರ)(೪ಯೊ+೨ಯರ+ ರೊ+೩). ೩೩. (೩ಪ-೨ಬ)(೯ಪೊ
 + ೬ಪಬ+೪ಬೊ-೪). ೩೪. (೪ಯೊ+೩ರ)(೧೬ಯೊ-೧೨ಯರ+೯ರೊ-೧).
 ೩೫. ಜ(ಪ+೨ಭ)(೨ಜಪೊ-೧೦ಪಭ+೪ಭೊ-೪). ೩೬. (೨ಪ+ಬ)(೪ಪೊ
 - ೨ಪಬ+ಬೊ+೪). ೩೭. (ಗ+ಘ+೩)(೧ೊ-ಗಘ+ಘೊ). ೩೮. (೨ಕ-ಗ-೨)
 (೪ಕೊ+೨ಕಗ+ಗೊ). ೩೯. (೩ಪ-ಜಬ - ೩)(೯ಪೊ+೧ಜಪಬ+೨ಜಬೊ).
 ೪೦. (ಕ - ೨ಗ)(ಕ+೨ ಗ)(ಕೊ + ೨ಕಗ + ೪ಗೊ)(ಕೊ - ೨ಕಗ + ೪ಗೊ).
 ೪೧. (ಕೊ+ಗೊ)(ಕಳ-ಕೊಗೊ+ಗಳ). ೪೨. (ಪೊ+೪ಗೊ)(ಪಳ-೪ಪೊಗೊ
 +೧೬ಗಳ). ೪೩. (೨ಯೊ + ೩ಕ್ಷೊ)(೪ಯಳ - ೬ಯೊಕ್ಷೊ + ೯ಕ್ಷಳ).
 ೪೪. (೨ಯೊ-ಜಪೊ)(೪ಯಳ+೧೦ಯೊಪೊ+೨ಜಪಳ). ೪೫. (೩ಪ-ಮ)
 (೩ಪ+ಮ)(೯ಪೊ+೩ಪಮ+ ಮೊ)(೯ಪೊ-೩ಪಮ+ಮೊ). ೪೬. ೬(ಅೊ
 -೨ಕೊ)(ಅಳ+೨ಅೊಕೊ+೪ಕೊ). ೪೭. (೩ಕೊ-೪ಘೊ)(೯ಕೊ+೧೨ಕೊಘೊ
 +೧೬ಘೊ). ೪೮. (೨ಯೊ-ರ)(೨ಯೊರ)(೪ಯೊ+ರೊ)(೪ಯೊ+೨ಯರ
 +ರೊ)(೪ಯೊ-೨ಯರ+ರೊ)(೧೬ಯೊಳ-೪ಯೊರೊ+ರಳ). ೪೯. (೨ದ+೩ನೊ)
 (೮ದೊ-೧೨ದನೊ+೧೮ನೊ-೫). ೫೦. (೨ಪ+೩ಬ)(೪ಪೊ-೪ಪಬ+೯ಬೊ).
 ೫೧. (೩ಕ + ೪ಗ)(೯ಕೊ - ೧ಜಕಗ + ೧೬ಗೊ). ೫೨. (ಜರ-೪ಸ)(೨ಜರೊ
 +೨೨ರಸೊ+೧೬ಸೊ). ೫೩. (೨ಯೊ-ಜಕ್ಷೊ)(೪ಯೊ+೭ಯೊಕ್ಷೊ+೨ಜಕ್ಷೊ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

ಪು. ೧೩೯.

೧. (೨ಯೊ-೩)(ಯೊ-೨). ೨. (೨ಯೊ-೧)(ಯೊ-೪). ೩. (೨ಯೊ+ಜ)
 (೩ಯೊ+೧). ೪. (೩ರ-೨)(೪ರ-೫). ೫. (೩ಯೊ-೧)(೨ಯೊ+೧). ೬. (೮ರ
 -೧)(೨ರ-೩). ೭. (೨ವ+೭)(ವೊ-೨). ೮. (ಕ್ಷೊ-೮)(ಕ್ಷೊ+೧). ೯. (೪ಯೊ
 +೧)(ಯೊ-೭). ೧೦. (ಜವೊ-೧)(೩ವೊ+೨). ೧೧. (೨ಪ-೩)(೭ಪ+೧).
 ೧೨. (೧೧ನೊ+೨)(೨ನೊ+೩). ೧೩. (೩ಪೊ-೨)(೬ಪೊ-೧). ೧೪. (೭ಮೊ-೩)
 (ಮೊ+೫). ೧೫. (೨ಪ + ಜ)(೫ಪ - ೨). ೧೬. (೩ದ - ೨)(೪ದ + ೧).
 ೧೭. (೯ರ-೨)(ರೊ-೧). ೧೮. ೧೧(೨ಯೊ-೧)(ಯೊ-೩). ೧೯. ೨ಪ(೬ಪ+೫)
 (೨ಪ-೧). ೨೦. ೭ಅ(೨ಅ-೩)(೩ಅ-೨). ೨೧. ೩ಪೊ(ಪ-೫)(೩ಪ+೧).

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೨೭.

ಪು. ೧೫೩, ೧೫೪.

೧. (ಅಯ+೩)(ಯ+೧). ೨. (ಓಯ+೧)(ಯ+೧). ೩. (ಓರ+೨)(೨ರ+೩). ೪. (ಓವ+೧)(ಅವ+೫). ೫. (ಓಲ-೧)(ಅಲ-೧). ೬. (ಅರ-೧)(ಓರ-೫). ೭. (ಅಪ-೩)(ಅಪ-೩). ೮. (ಮ-೪)(ಓಮ-೧). ೯. (ಅರ-೩)(ಓರ+೧). ೧೦. (ಅಸ+೧)(ಅಸ-೧). ೧೧. (ಜಯ-೧)(ಯ+೨). ೧೨. (ಪ-೭)(ಅಪ+೧). ೧೩. (ಅದ-೩)(ಜದ+೧). ೧೪. (ಓಕ್ಷ-೧)(ಅಕ್ಷ-೩). ೧೫. (ಅರ-೩)(ಅರ-೩). ೧೬. (ಅಪ-೫)(ಅಪ+೧). ೧೭. (ಓಯ+೫)(ಯ+೬). ೧೮. (ಓನ-೨)(ಜನ+೧). ೧೯. (ಬ-೮)(ಅಬ+೧). ೨೦. (ಓಯ+೫)(ಅಯ+೩). ೨೧. (ಓಯ-೧)(ಅಯ+೩). ೨೨. (ಯ+೬)(ಅಯ+೬). ೨೩. (ಅಯ-೧)(ಓಯ+೧೦). ೨೪. (ಯ-೧)(೧೦ಯ-೯). ೨೫. (ಅಪ+೫)(ಅಪ+೩). ೨೬. (ಅಮ-೧)(ಅಮ+೫). ೨೭. (ಅಯ-೩)(ಓಯ-೨). ೨೮. (೧೦ರ-೧)(ರ-೯). ೨೯. (ಯ+೪)(ಅಯ-೫). ೩೦. (ಅರ-೩)(ಓರ-೫).

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

ಪು. ೧೫೭.

೧. (ಯ+೨)(ಯ+೫). ೨. (ರ+೫)(ರ+೯). ೩. (ವ+೫)(ವ+೮). ೪. (ಲ+೩)(ಲ+೭). ೫. (ಸ+೫)(ಸ+೭). ೬. (ಕ್ಷ-೨)(ಕ್ಷ-೫). ೭. (ಮ-೩)(ಮ-೫). ೮. (ನ-೩)(ನ-೫). ೯. (ಯ-೨)(ಯ-೮). ೧೦. (ಯ-೫)(ಯ-೧೫). ೧೧. (ಯ-೮)(ಯ+೩). ೧೨. (ರ-೬)(ರ-೩). ೧೩. (ಮ-೩)(ಮ-೫). ೧೪. (ನ-೫)(ನ+೧೦). ೧೫. (ಪ-೭)(ಪ+೮). ೧೬. (ವ-೮)(ವ+೧೦). ೧೭. (ಬ-೩)(ಬ+೮). ೧೮. (ರ-೪)(ರ+೧೪). ೧೯. (ರ-೧೭)(ರ+೮). ೨೦. (ಯ-೫)(ಯ+೫). ೨೧. (ನ+೧೦)(ನ-೧೧). ೨೨. (ತ-೩)(ತ+೩). ೨೩. (ದ+೪)(ದ+೪). ೨೪. (ಕ+೪)(ಕ+೫). ೨೫. (ಅ-೧೨)(ಅ-೫). ೨೬. (ಗ-೩)(ಗ+೪). ೨೭. (ರ-೫)(ರ+೧೦). ೨೮. (ವ-೨೭)(ವ+೩). ೨೯. (ಪ-೧೦)(ಪ-೨೦). ೩೦. (ಮ-೧೨)(ಮ+೮). ೩೧. (ರ-೫)(ರ+೭). ೩೨. (ಯ-೫)(ಯ+೭). ೩೩. (ಸ+೧೧)(ಸ+೧೨). ೩೪. (ಯ-೧೬)(ಯ+೧೭). ೩೫. (ಯ-೨೦)(ಯ+೧೯). ೩೬. (ರ-೩೬)(ರ+೨೦). ೩೭. (ಕ್ಷ-೮)

(ಕ್ಷ-೩). ೩೮. (ಅ-೪೦)(ಅ+೩೮). ೩೯. (ಪ-೧೬)(ಪ+೫). ೪೦. (ಯ+೮)
 (ಯ+೨೨). ೪೧. (ಅಯ+೫)(ಅಯ+೮). ೪೨. (ಕಯ-೭)(ಕಯ-೪).
 ೪೩. (ಯ-೨ಕ್ಷ)(ಯ-೩ಕ್ಷ). ೪೪. (ಯ-೨ಕ್ಷ)(ಯ+೭ಕ್ಷ). ೪೫. (ಪ-೬ಬ)
 (ಪ+೩ಬ). ೪೬. (ಯ+೨ಬ)(ಯ+೩ಬ). ೪೭. (ಯ-೧೨ಬ)(ಯ+೪ಬ).
 ೪೮. (ಅಯ-೬ಕ)(ಅಯ+೩ಕ). ೪೯. (ಪಯ-೪ಮುಕ್ಷ)(ಪಯ+೫ಮುಕ್ಷ).

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

ಪು. ೧೬೪.

೧. (೩ಯ - ೫)(೫ಯ + ೨). ೨. ೨(೪ರ-೩)(೪ರ+೧). ೩. ೩(ವ+೩)
 (೨ವ-೭). ೪. (೫ಲ-೧೧)(೨ಲ+೩). ೫. ೪(೨ಸ-೩)(೭ಸ+೩). ೬. (೧೦ಕ್ಷ
 -೩)(೫ಕ್ಷ+೨). ೭. (ಯ+೨-೫)(ಯ+೨+೭). ೮. (ಲ+ವ+೮)(ಲ+ವ-೯).
 ೯. (೨ರ+೨ಸ+೩)(೨ರ+೨ಸ+೫). ೧೦. (೩ಯ + ೩ಕ್ಷ + ೪)(೨ಯ + ೨ಕ್ಷ-೫).
 ೧೧. (೮ಯ+೮ರ-೩ಲ-೩ವ)(೨ಯ+೨ರ+೨ಲ+೨ವ). ೧೨. (೨ಪ+೨ಫ-೫ಬ
 -೫ಮ)(ಪ+ಫ+೫ಬ+೫ಮ). ೧೩. (೩ಯ - ೨ರ - ೪ವ)(೨ಯ + ೨ರ - ೨ವ).
 ೧೪. (೨ಯ+೩ವ+೨ಸ)(೫ಯ+೨ವ-೩ನ).

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೩೦.

ಪು. ೧೬೮.

೧. ಅ. ೨. ೨ಕ. ೩. ೪. ೪. ೪ಪ. ೫. ೧೨. ೬. ಕಯ. ೭. ಪರ. ೮. ಗಮ. ೯. ೨೨. ೧೦. ೨೨ಕ. ೧೧. ೨೨ಯ. ೧೨. ೫೨ರ. ೧೩. ೫೨ಯರ. ೧೪. ಯರಲ. ೧೫. ೧೧ಯರ. ೧೬. ೨ಪಬಮ. ೧೭. ೨೨ಯರ. ೧೮. ೪ಪಬಮ. ೧೯. ೨ಪಬಮ. ೨೦. ಕಗ. ೨೧. ೫ಯರಲ. ೨೨. ೪. ೨೩. ೪ಯರಲ. ೨೪. ೯೨ಕಗ. ೨೫. ೨೬. ೨೨ಕ. ೨೭. ೨ಯ. ೨೮. ಯರ. ೨೯. ೫ಲವ. ೩೦. ಯ. ೩೧. ೨೨ಯರಸ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

ಪು. ೧೭೦, ೧೭೧.

೧. ೨(ಅ+೨ಕ). ೨. ಕ. ೩. ೨(೨ಪ - ಬ+೩ನ). ೪. ೩ಯರಲ. ೫. ೪(ಬ+ಬ-೫). ೬. ೨(ಪ+ಬ+ಮ). ೭. ೩(೪ಪ-೩ನ). ೮. ೫(೨೨
 -೩ಕ+ಗ. ೯. ೨ಯ(೨ಯ-೨ರ). ೧೦. ೩ಕಪ(ಕ+ಪ). ೧೧. ೨೨(೨೨-ಕ).
 ೧೨. ೪.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಪು. ೧೭೪.

೧. ಯ+ಞ. ೨. ಯ-ಓ. ೩. ಯ+ಒ. ೪. ಯ-ಉ. ೫. ೭(ಪ-ಮ).
 ೬. ೨೦೦೩೬. ೭. ೨(ಅ-ಕ). ೮. ೨೦೦-೭ಮ. ೯. ಯ-೨ರ. ೧೦. ೨(ದ೦-
 -ದನ+ನ೦). ೧೧. ರ+ಉ. ೧೨. ಉ. ೧೩. ೨ಯ. ೧೪. ಯ೦-೨೦.
 ೧೫. ಯ೦-೨ಯರ+ಉರ೦. ೧೬. (೨ಯ-೩ರ)೦. ೧೭. ೩(ಯ೦-ಉರ೦).
 ೧೮. ೩ಕ್ಷ-೨.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

ಪು. ೧೭೭.

೧. ಉಱ. ೨. ೩೦೦೦೦೦. ೩. ಉಕ೦ಗ೦. ೪. ೨೪೦೦೦೦೦. ೫. ೨೪
 ಕ೦ಪ೦ಬ೦. ೬. ೧೦೦೦೦೦. ೭. ೨೪೦೦೦೦೦೦. ೮. ೪೦೦೦೦೦೦೦
 ಯ೦ರ೦. ೯. ೧೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦. ೧೦. ೧೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦. ೧೧.
 ೩೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦. ೧೨. ೫೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦. ೧೩. ೨೪೦೦೦೦೦೦೦
 ಲ೦೦೦. ೧೪. ೧೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦. ೧೫. ೨೪೦೦೦೦೦೦೦೦೦೦.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಪು. ೧೭೯-೧೮೧.

೧. (ಯ-೭)(ಯ-ಉ)(ಯ+೨)(ಯ+೩). ೨. ೧೨(ಯ-ಉ)(ಯ-ಞ)
 (ಯ-ಉ)(ಯ+೭). ೩. ೨೦೦(ಯ+೭)(೨ಯ-೭). ೪. ೧೨(ಯ-೩ರ)೦
 (ಯ+೩ರ)(ಯ+೨ರ). ೫. ೧೨(ಯ-ಉರ)(ಯ+ಞರ)(ಯ+೭ರ).
 ೬. ೨೪(೨ಯ-೧)(೩ಯ-೧)(೪ಯ+೩). ೭. (ಞ-೨ಯ)(೩-ಯ)
 (೭-೩ಯ). ೮. ೧೨(೧-ಉಯ)(೨-ಯ)(೩-ಞಯ). ೯. ೩೦(೨ರ-ಸ)
 (೨ರ+ಞಸ)(೩ರ-೨ಸ)೦. ೧೦. ೩೦(ಉರ-೧)೦(೭ರ-ಞ)೦. ೧೧. ೬(೨೫ರ೦
 -೩೬ಲ೦)೦. ೧೨. ೨(೧೬ಯ೦-೯ಕ್ಷ೦)(೪ಯ೦-೯ಕ್ಷ೦). ೧೩. ಉ(ಉಯ-ರ)
 (ಉಯ-ರ)(೨ಯ+ರ). ೧೪. ಪ೦-೬೪ಮ೦. ೧೫. ೩೦೦(ಉಯ+೨೭ಮ೦)
 (೨೦-೩ಮ)(ಉಯ-೯ಮ). ೧೬. ೬(೨೦೦೦೦)(ಉಯ-೩ಮ)(೨ಯ-೩ಮ)
 (ಉಯ+೩ಮ). ೧೭. (ಉಯ-೧೬ಗ೦)(ಉಯ-೧೦). ೧೮. (೨೫೦-೩೬)
 (೩೬೦-೨೫). ೧೯. ೧೨(೨೫ಯ೦-ಉರ೦)೦(೨೫ಯ೦-೧೬ರ೦). ೨೦. ೧೨
 (ಉಯ೦-೯ರ೦)(ಉಯ೦-೨೫ರ೦). ೨೧. (ಪ೦-೧೬ಮ೦)(೨೦೦+ಞಮ೦).
 ೨೨. ೬೪೦೦ - ೭೯೦೦. ೨೩. (ಯ೦-೯ಮ೦)(ಉಯ೦-೨೫ಮ೦).
 ೨೪. ೨೦(ಉಯ+೯ಮ)(೭೯೦೦-೬೪ಮ೦). ೨೫. ೧೪(೨ಯ-೭ಮ)(೨ಯ

+ಜವ)(೭ಯ-೨ವ). ೨೬. ಯ-೪; ೬(ಯ-೪)^೨(ಯ-೧೩)(ಯ+೯)
 (ಯ+೨೫). ೨೭. ಜವ-೩; ೧೨(ಜವ-೩)^೨(ಜವ+೩)(೯ವ^೨-೨೫).
 ೨೮. ೯ಪ+೭ಮ; (೯ಪ-೭ಮ)(೭ಪ-೯ಮ)(೭೯ಪ^೨+೩೪೩ಮ^೨).
 ೨೯. ೪ಅ-೨೭ಕ; (೪ಅ-೨೭ಕ)^೨(೨ಅ-ಕ)(ಅ-೨ಕ). ೩೦. ೨ಕ(ಕ-೧);
 ೧೨ಕಗ^೨(೨ಕ-೧)(೨ಕ-೩ಗ)(೩ಕ-೨ಗ)(೩ಕ-೪ಗ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೫.

ಪು. ೧೮೬.

೧. $\frac{ಅ}{ಇ}$ ೨. $\frac{೧}{೩ಕ^೨ಗ^೨}$ ೩. $\frac{೪}{ಯರ}$ ೪. $\frac{ಯ^೨}{೨ಅ}$ ೫. $\frac{ಪ}{೪ಮ}$
 ೬. $\frac{೪ಕ^೨ಜಿ}{ಜಗ^೨}$ ೭. $\frac{೨ಪ}{೩ಬಮ^೨}$ ೮. $\frac{೨ಬ^೨}{೩ಪಮ}$ ೯. $\frac{೩ಬ^೨ಮ^೨}{ಜಪ^೨}$ ೧೦. $\frac{೨ಯರ}{ಜಲ^೨}$
 ೧೧. $\frac{೨ಅರ^೨}{೧ಜಯಲ}$ ೧೨. $\frac{೬ಗ^೨}{೧೧ಕಘ}$ ೧೩. $\frac{೨ಅ^೨ಲ}{೩ಯರ^೨}$ ೧೪. $\frac{೧೧ಪಮ}{೧೯ಬ^೨ಜಿ}$
 ೧೫. $\frac{ಅಬ}{೪ಇಪಮ}$ ೧೬. $\frac{ಜಯರ^೨}{೯ಅಇ}$ ೧೭. $\frac{೨ಯ^೨ಲ^೨ಪ}{ಜರ^೨}$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

ಪು. ೧೮೯, ೧೯೦.

೧. $\frac{೧}{೩}$ ೨. $\frac{ಪ}{೩ಬ}$ ೩. $\frac{೨ಯ}{೩ರ}$ ೪. $\frac{ಜಅ}{೭ಕ}$ ೫. $\frac{ಯ+ರ}{೩(ವ+ಪ)}$ ೬. $\frac{೧}{೪ಬ}$
 ೭. $\frac{೮ಪ}{೯ಬ}$ ೮. $\frac{೩ಯ+ಜರ}{೨(ಯ+೩ರ)}$ ೯. $\frac{೪}{ಪ(ಕ-ಗ)}$ ೧೦. $\frac{೧}{ಅ+೪}$ ೧೧. $\frac{೧}{೨ಕ-೭ಗ}$
 ೧೨. $\frac{ಮ+ಜ}{ಮ+೨}$ ೧೩. $\frac{೨(೨ಪ-೩)}{೩(೨ಪ-೧)}$ ೧೪. $\frac{೧}{೯ಪ^೨+೨೫}$ ೧೫. $\frac{೧೨ಪ-೧೩ಮ}{೧೨ಪ-ಮ}$
 ೧೬. $\frac{೧}{೨ಅ+೩ಕ}$ ೧೭. $\frac{೨ಪ}{೩ಬ(ಜಯ-೬ವ)}$ ೧೮. $\frac{೬ಯ-೭ಲ}{೬ಯ+೭ಲ}$
 ೧೯. $\frac{೨ರ-೯ಪ}{೨(೨ರ+೯ಪ)}$ ೨೦. $\frac{೪ಯ+ಜಪ}{ಯ+ಜಪ}$ ೨೧. $\frac{೪ಯ+೭ರ}{ಜಯ-ರ}$ ೨೨. $\frac{೨ಪ-೯ಮ}{೧೦ಪ-೩ಮ}$
 ೨೩. $\frac{೨ಯ-ರ}{೩ಯ-ರ}$ ೨೪. $\frac{೪ಯ+೯ರ}{೪ಯ-ರ}$ ೨೫. $\frac{೩ರ+೭ಪ}{೩ರ+೧೦ಪ}$ ೨೬. $\frac{೨(೨ಪ+ಜಮ)}{ಜ(೩ಪ-ಮ)}$

೨೭. $\frac{೨೮-೭}{೩೮+೧}$ ೨೮. $\frac{೨(೩೮+೨)}{೫(೪೮-೧)}$ ೨೯. $\frac{೮(೪೮-೨೮)}{೪೮(೪೮-೮)}$ ೩೦. $\frac{೪೮+೩೮}{೨೪-೮}$
೩೧. $\frac{೮೨+೨೮೮+೪೮೨}{೮೨+೮}$ ೩೨. $\frac{೧೩೮-೧೨೮೮+೯೮೨}{೪೮(೪೮+೩೮)}$
೩೩. $\frac{೩೮-೮}{೯೮-೩೮೮+೮೨}$ ೩೪. $\frac{೪೮+೯೮}{೪೮+೯೮}$ ೩೫. $\frac{೪೮-೯೮}{೪೮+೯೮}$
೩೬. $\frac{೪೮-೯೮}{೪೮-೮೨}$ ೩೭. $\frac{೮೪೪+೯೪೪+೮೪೪}{೯೪೪+೮೨}$
೩೮. $\frac{೧೦೦+೭೦೮+೪೮೨}{೨೪(೧೦-೭೮)}$ ೩೯. $\frac{೩೪-೮೪೪+೧೩೪೪}{೩೮(೮+೧೪೪)}$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩೭.

ಪು. ೧೯೨-೧೯೪.

೧. $\frac{೮೮೮}{೩೮೮}$ ೨. $\frac{೮೮}{೮೨}$ ೩. $\frac{೪೮೪}{೨೪೮}$ ೪. $\frac{೪೮೪}{೨೪೮}$ ೫. $\frac{೪೮೪}{೨೪೮}$
೬. ೧. ೭. ೧. ೮. $\frac{೩೪೪}{೨೪೮}$ ೯. $\frac{೮೮೪}{೮೪೪}$ ೧೦. $\frac{೩೪೪}{೮೨}$ ೧೧. $\frac{೧೩೪}{೮೮೮}$
೧೨. $\frac{೮೮೮}{೩೪೪}$ ೧೩. $\frac{೨೮೮೪}{೮೪೪}$ ೧೪. $\frac{೧೩೪}{೫೪೪}$ ೧೫. $\frac{(೮೪+೪)(೪೪+೪೮+೮೨)}{(೪೪+೮)(೮೨+೮೮+೮೨)}$
೧೬. $\frac{೮-೮}{೪೮-೮}$ ೧೭. $\frac{(೪೪+೮)(೮-೮)}{(೪೪-೮)(೮+೮)}$ ೧೮. $\frac{೪೪+೮}{೮-೮}$ ೧೯. $\frac{೪-೮}{೮+೮}$
೨೦. $\frac{೮-೪೮೮}{೩೪+೪೪}$ ೨೧. $\frac{೮೪(೩೮+೪೮೮)}{೧೫೪(೪೪-೨೮)}$ ೨೨. $\frac{೮೮೪}{೧೫೪೪}$ ೨೩. $\frac{೩೮}{೨}$
೨೪. $\frac{೪೮೮}{೩೪೮}$ ೨೫. $\frac{೪೮೮}{೫೪(೨೮+೩೮)}$ ೨೬. $\frac{(೨೮-೩೮)(೪೪+೪೮)}$
೨೭. $\frac{೪೪+೮}{೪೪+೪}$ ೨೮. $\frac{೫೮+೨}{೪೮-೯}$ ೨೯. $\frac{೪೪-೭೮}{೨(೨೪+೮)}$ ೩೦. $\frac{೪೮-೩೮೮}{೪(೭೮-೮೮)}$
೩೧. $\frac{೮+೩೪}{೮+೮}$ ೩೨. $\frac{೪(೨೪-೩೪)}{೫(೫೪-೮)}$ ೩೩. $\frac{೨(೪೪-೩೮)}{೫(೫೪+೩೮)}$ ೩೪. $\frac{೩೮-೫೮}{೩೮+೫೮}$

$$\text{೩೫. } \frac{\text{ವಳಿ} + \text{ಳವೌಮೌ} + \text{ಗೃಮಳಿ}}{\text{ವೌ} - \text{ಳಮೌ}}. \quad \text{೩೬. ಗ.} \quad \text{೩೭. ೩.}$$

$$\text{೩೮. } \frac{(\text{ಜರ} + \text{ಲ})(\text{ಜರ} - \text{ಳಲ})}{(\text{ಜರ} + \text{೨ಲ})(\text{ಜರ} + \text{೯ಲ})}. \quad \text{೩೯. } \frac{\text{೬ಯ} - \text{ಗ}}{\text{೮ಯ} + \text{೩.}}$$

$$\text{೪೦. } \frac{(\text{೨ಅ} - \text{ಜವ})(\text{ಗೃಅಳಿ} + \text{ಅವೌ} + \text{ವಳಿ})}{(\text{೨ಅ} - \text{ವ})(\text{ಗೃಅಳಿ} + \text{ಳಅವೌ} + \text{ವಳಿ})}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

ಪು. ೧೯೭-೧೯೯.

$$\text{೧. } \frac{\text{ಅರ}}{\text{೬ಇಯ}}. \quad \text{೨. } \frac{\text{ಗಗಲ}}{\text{೮ಅರ}}. \quad \text{೩. } \frac{\text{ಗಳಬಮ}}{\text{ಗಜವಯ}}. \quad \text{೪. } \frac{\text{ಜವ}}{\text{೬ಅವ}}. \quad \text{೫. } \frac{\text{೨ಪರ}}{\text{೨೭ಅಮ}}.$$

$$\text{೬. } \frac{\text{ಗಂಬರ}}{\text{೯ವಯಲೌ}}. \quad \text{೭. } \frac{\text{ಳ೦}{೨೭}}{\text{೨೭}}. \quad \text{೮. } \frac{\text{೨ಜಕ}}{\text{೧೨ಅ}}. \quad \text{೯. } \frac{\text{೩ಅ}}{\text{೨ಕ}}. \quad \text{೧೦. } \frac{\text{೨ಯ-ಜವ}}{\text{೩ಯ-ಳವ}}$$

$$\text{೧೧. } \frac{\text{ವ(ವ-ಜಬ)}}{\text{ವ(ಳವ+ಜಮ)}}. \quad \text{೧೨. } \frac{\text{೨ಯ+ರ}}{\text{೩ಯ+೩ರ}}. \quad \text{೧೩. } \frac{\text{೩(೨ವ+೩ರ)}}{೨}$$

$$\text{೧೪. } \frac{(\text{ಯ} + \text{ಳಲ})(\text{ಯೌ} + \text{೩ಯಲ} + \text{೯ಲೌ})}{(\text{ಯ} + \text{೩ಲ})(\text{ಯೌ} + \text{ಳಯಲ} + \text{ಗೃಲೌ})}. \quad \text{೧೫. } \frac{\text{೨(ವ+೮ಮ)}}{\text{ಪ-೩ಮ}}$$

$$\text{೧೬. } \frac{(\text{ಳಯ-೩})(೨ಯ-೧)}{(\text{ಳಯ-೫})(೨ಯ+೧)}. \quad \text{೧೭. } \frac{\text{೭ಪ-೧}}{\text{ಳ(೨ಪ+೩)}}. \quad \text{೧೮. } \frac{\text{ಜಅ}}{\text{೩ಯೌ-ಳವೌ}}$$

$$\text{೧೯. } \frac{\text{ಗ}}{\text{೩೨}}. \quad \text{೨೦. } \frac{\text{ಳವೌ+ಗ೦ಪಮ+೨ಜಮೌ}}{\text{ಳಪ+ಮ}}. \quad \text{೨೧. } \frac{\text{ಳಯ-ರ}}{\text{೨ಯ+ರ}}. \quad \text{೨೨. } \frac{\text{ಅ+ಗ}}{\text{ಅ-ಳ}}$$

$$\text{೨೩. } \frac{\text{೩ನವ}}{\text{೨ಗಮ}}. \quad \text{೨೪. } \frac{\text{೨(ರ-ಳ)}}{\text{ರ+ಗ}}. \quad \text{೨೫. } \frac{\text{೨ಮ-೩}}{\text{೨ಮ+೩}}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೯.

ಪು. ೨೦೨, ೨೦೩.

$$\text{೧. } \frac{\text{೨ಜಯ}}{\text{ಳ೦}}, \frac{\text{೬ರ}}{\text{ಳ೦}}. \quad \text{೨. } \frac{\text{ಗೃಯ}}{\text{೩೬}}, \frac{\text{೨೭ಯ}}{\text{೩೬}}. \quad \text{೩. } \frac{\text{೬ರ}}{\text{ಗಜ}}, \frac{\text{೨೦ರ}}{\text{ಗಜ}}. \quad \text{೪. } \frac{\text{ಳ೦ರ}}{\text{ಳಜ}},$$

$$\frac{\text{೧೨ಪ}}{\text{ಳಜ}}. \quad \text{೫. } \frac{\text{೨ಳಲ}}{\text{ಳ೨}}, \frac{\text{೩ಜವ}}{\text{ಳ೨}}. \quad \text{೬. } \frac{\text{೯ಯ}}{\text{೧೨}}, \frac{\text{೧೦ರ}}{\text{೧೨}}, \frac{\text{೮ವ}}{\text{೧೨}}. \quad \text{೭. } \frac{\text{೧೨ಅ}}{\text{೩೦}}, \frac{\text{೯ಇ}}{\text{೩೦}},$$

$$\frac{\text{೮ಕ}}{\text{೩೦}}. \quad \text{೮. } \frac{\text{೫ಳಪ}}{\text{೬೦}}, \frac{\text{೨ಗಬ}}{\text{೬೦}}, \frac{\text{೫೦ಮ}}{\text{೬೦}}. \quad \text{೯. } \frac{\text{೩೦ತ}}{\text{೧೦ಜ}}, \frac{\text{೨೦ದ}}{\text{೧೦ಜ}}, \frac{\text{೫೬ನ}}{\text{೧೦ಜ}}. \quad \text{೧೦. } \frac{\text{೨ಮಯ}}{\text{ಪಮ}},$$

[illegible]

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

ಪು. ೨೦೭, ೨೦೮.

೧. $\frac{ಜಪ}{೧೨}$. ೨. $\frac{೪೭ಪ}{೪೫}$. ೩. $\frac{೧೭ಯ}{೧೨}$. ೪. $\frac{ರ}{೨೪}$. ೫. $\frac{ಜರ}{೪೨}$. ೬. $\frac{೭ಯ}{೬}$.
೭. $\frac{೩೧ರ}{೨೪}$. ೮. $\frac{೩೭ವ}{೩೬}$. ೯. $\frac{೩ಯ}{೪}$. ೧೦. $\frac{೧೩ಪ}{೪೫}$. ೧೧. $\frac{೨೦}{೩ಪ}$. ೧೨. $\frac{೧೩}{೧೨ಪ}$.
೧೩. $\frac{೧೧}{೪ಪ}$. ೧೪. $\frac{೨೪ಕಮ+೪ಗಪ+೯ಘ}{೧೨ಪಬಮ}$. ೧೫. $\frac{ಯ೩-ರ೩+೨೩}{ಯರಲ}$.
೧೬. $\frac{೮ಮ೨-೯ಪ೨-೫ಬ೨}{೬ಪಬಮ}$. ೧೭. $\frac{ಪ೨+೨ಪಮ+ಮ೨}{೨ಪ೨ಮ೨}$.
೧೮. $\frac{೪ಕ೨-೧೨ಕಗ+೯ಗ೨}{೧೨ಕ೨ಗ೨}$. ೧೯. $\frac{೨ಗ}{ಕ೨-ಗ೨}$. ೨೦. $\frac{೮ಕ}{ಕ೨-ಗ೨}$.
೨೧. $\frac{೪೪ಯ-೨೫ವ}{೧೨}$. ೨೨. $\frac{೧೬ಪ-೧೯}{೬}$. ೨೩. $\frac{೯ಯ+೨೯}{೧೫}$. ೨೪. $\frac{೫೪ವ-೬೫}{೨೪}$.
೨೫. $\frac{೫೬ಯ+೩ರ}{೪೦}$. ೨೬. $\frac{೫(ಕ೨+ಗ೨)}{ಕ೨-ಗ೨}$. ೨೭. $\frac{ಯ+೩ಕ್ಷ}{೬}$. ೨೮. $\frac{೩ಯ+ವ}{೧೦ಮ}$.
೨೯. $\frac{೨(ಕ೨+ಗ೨)}{ಕಗಘ}$. ೩೦. $\frac{೭(ಕ್ಷ+೧)}{(ಕ್ಷ-೨)(ಕ್ಷ+೫)}$. ೩೧. $\frac{೫೪}{ಪ೨-೯}$.
೩೨. $\frac{ಯ-೧೯}{(ಯ-೩)(ಯ-೫)}$. ೩೩. $\frac{೪}{ರ+೨}$. ೩೪. $\frac{೬}{ವ-೩}$.
೩೫. $\frac{೩}{(ಯ+೩)(ಯ+೬)}$. ೩೬. $\frac{ಯ}{ಯ೨-೨೫}$. ೩೭. $\frac{ಮ}{ಮ೨-೧೪೪}$.
೩೮. $\frac{ಯ೨+೧೯ಯ+೧೦}{(೩ಯ+೨)(೫ಯ+೨)}$. ೩೯. $\frac{೧}{೨(೪ಪ-೩ವ)}$.
೪೦. $\frac{೧}{(ಯ-೫)(೨ಯ+೫)(೩ಯ+೧)}$. ೪೧. $\frac{೯ನ೨+೯ನ-೧೧}{(೩ನ-೪)(೩ನ+೧)}$.
೪೨. $\frac{೨ಪ೨-೧೫ಪ-೨೫}{೨ಪ೨/೪ಪ೨-೫೫}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

ಪು. ೨೦೩-೨೦೫.

೧. ೯. ೨. ೧೨. ೩. ೫. ೪. ೨೫. ೫. ೧೫. ೬. ೯ವ.; ೩೯ವ.
೭. ೩೬ವ.; ೪೦ವ. ೮. ೧೨ವ.; ೩೬ವ. ೯. ೧೧ವ.; ೩೭ವ.; ೪೧ವ.
೧೦. ೫೦ವ.; ೫೫ವ. ೧೧. ೮ ಶೇರು; ೨೦ ಶೇರು. ೧೨. ೨|| ರೂ.; ೩ ರೂ.
೧೩. ೨೫; ೩೦೦. ೧೪. ೪೦೦೦೦ ರೂ.; ೫೦೦೦೦ ರೂ. ೧೫. ೪೦ ಬಿಳಿ;
೬೦ ಕೆಂಪು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೧.

ಪು. ೨೨೦-೨೨೨.

೧. ೧೦೦ ಮೈ. ೨. ೧೨೦ ಮೈ. ೩. ೧೦ ಶೇರು; ೧೩|| ೮. ೪. ೧೮ ಇಂ.,
೧೦ ಇಂ. ೫. ೨೦ ಜನರು; ೧೨ ದಿನಗಳು. ೬. ೨೮ ಸಾಲುಗಳು; ೧೩೫
ಪುಟಗಳು. ೭. ೧೬|| ಮೈಲು. ೮. ೩೦೦ ಹುಡುಗರು; ೪೮. ೯. ೩೬ ವಾರು;
೨೦ ವಾರು. ೧೦. ೬೦೦೦೦ ರೂ.; ೩೨೨%. ೧೧. ೪; ೮. ೧೨. ೨; ೮.
೧೩. ೩; ೨. ೧೪. ೨; ೧. ೧೫. ೨; ೨. ೧೬. ೩; ೨. ೧೭. ೩; ೫.
೧೮. ೧೦; ೧.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೩.

೧. ೩೦ ಮೈ.; ೪೦ ಮೈ. ೨. ೩; ೨, ೧. ೩. ಪ=(೨+೫)ತ; ೧೬೨ ಇಂ.
೪. (೭ಯ+೩)(೨ಯ-೯); (೪ಯ+೪ರ-೮)(೪ಯ-೬ರ+೮); (೫ರ-೭ಸ)
(೨೫ರ+೩೫ರಸ+೪೯ಸ). ೫. ೨ಪ-೭; (೨ಪ-೭)^೨(೨ಪ+೭)(೩ಪ+೭).
೬. $\frac{೧೬}{(೨ಯ-೭)(೨ಯ-೫)}$. ೭. ೨೦; ೧೨ ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೩.

೧. ೨೧೬. ೨. ೩; ೫, -೧೪. ೩. ಬ=೫ಮ; ೨೪೦೦೦; ೧೯೮, ೧೯೯,
೨೦೦, ೨೦೧, ೨೦೨. ೪. (೪ಯ-೩)(೨ಯ+೭); (೪ಯ-೫ರ)(೪ಯ
-೫ರ+೩); (೨ರ-೩ಸ)(೪ರ+೯ಸ). ೫. ಕ-೫ಗ; (ಕ-೬೫ಗ)
(ಕ+೫ಕಗ+೨೫ಗ). ೬. $\frac{೪(ಪ-ಬ)}{(ಪ+ಬ)(ಪ+ಬ)}$. ೭. ೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೩ನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೪.

೧. ೯; ೫. ೨. ೩; ೨, ೧. ೩. ಕ್ಷ=೨೯(ಉ+ಅ); ೨೫೨೦ ಚೌ. ಪೂ.

೪. (ಅಯ+೩ರ)(ಆಯ-೩ರ); (ಅಪ+೩ಬ)(ಅಪ-೩ಬ)^೨; (ಕ-೧)(ಕ+೧)
(ಜಕ-೨)(ಜಕ+೨). ೬. $\frac{ಜಿ}{ಸ-೮}$. ೭. ೧೨; ೪|| ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೪ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೫.

೧. ೭. ೨. $\frac{೨}{೩}$; ೧, - $\frac{೧}{೩}$. ೩. $\frac{ಅ-೨೨}{೨೨}$ -ಉ; ೧೦ ಪೂ. ೪. (೭ಯ - ಆರ)
(ಯ-೨ರ+ಜ); (೯ರ-೧೯ಲ)(೮೧ರ^೨+ರಲ+೯೧ಲ^೨); (೩ದ-೪ನ)(೩ದ+೪ನ)
(೯ದ^೨+೧೬ನ^೨). ೬. $\frac{೨}{ಯ}$. ೭. ೫ ರತ್ತಲು; ೮ ರತ್ತಲು.

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೬.

೧. ೧೨೮; ೭೨. ೨. ೪; ೫; ೮. ೩. (ಅ-೪)(ಉ-೪) ಚೌ. ಪೂ.; ಕ(ಅ-೪)
(ಉ-೪) ರೂ.; ೧೨೦ ಚೌ. ಪೂ.; ೩೬೦ ರೂ. ೪. ೨(ಪ-೧೫)(ಪ-೩೬);
(೨ಕ-೫ಗ+೬ಘ)(೨ಕ-೫ಗ-೬ಘ); (೫ಬ-೭ಮ)(೭ಮ+೧). ೫. ೨; ೩೬
(೪ಬ^೨-೨೫ಮ^೨)^೨. ೬. $\frac{೨೪೮ನ-೩೫ದ}{೪೦}$. ೭. ೧೪೦ ಚೌ. ಪೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೭.

೧. ೫ನ.; ೨೭ನ. ೨. ೨; ೩, -೨. ೩. ಪ=ಸ+(ನ-೧)ಬ; ೯೬ ರೂ.
೪. ೩(೨ಕ-೧)(೮ಕ-೩); (೪ಯ-೫ಕ್ಷ)(೪ಯ-೬ವ+೫ಕ್ಷ); ೨(೩ಯ-೨)
(೪ಯ+೧೧). ೫. ೨ಯ-೫ನ; ೧೨(೨ಯ-೫ನ)^೨(೨ಯ+೫ನ)(೨ಯ+೩ನ).
೬. $\frac{೨(೭ಅ+೩)}{ಅ(ಅ+೧)}$. ೭. ೨೫ ವಾರು, ೩೬ ವಾರು; ೩೦ ವಾರು, ೩೦ ವಾರು;
೨೦ ವಾರು, ೪೫ ವಾರು.

ಪತ್ರಿಕೆ ೭ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೮.

೧. ೭೦೦; ೧೮೦; ೪೦. ೨. ೪; ೨, -೧. ೩. ವ = $\frac{ಪ-ಸ}{ಬ}$ +೧; ೧೨ನೆಯ
ವರ್ಷ. ೪. (ಯ-ವ)(ಯ+ವ-೧); ೪(೨ಪ-ಬ)(೭ಪ-೩ಬ); (೩ಪ-೧೩ಮ)^೩.
೫. ೪(ಪ-೨ಬ); ೪೮(೨ಪ-ಬ)(ಪ^೨-೪ಬ^೨)(ಪ^೨+೨ಪಬ+೪ಬ^೨). ೬. $\frac{೬}{ಪ-ಮ}$.
೭. ೫೧೨.

ಪತ್ರಿಕೆ ಲನೆಯದು.

ಪು. ೨೨೯.

೧. ೧೧೫ ಮೈ. ೨. ೩; ೪, ೨. ೩. $s = \frac{ಖ-೪೮೦}{೫೨}$; ೩. ೪. ೫(೩ಯ-೨)
(೫ಯ+೨); (೩ಪ-೫ಬ)(೯ಪ+೨೫ಬ); (೨ಪ+೩ಪಬ+೫ಬ)(೨ಪ-
-೩ಪಬ+೫ಬ). ೫. ೩ಪ-೪ಮ; ೬(೩ಪ+೪ಮ)(೩ಪ-೪ಮ)-(೯ಪ+
+೧೨ಪಮ+೧೬ಮ). ೬. $\frac{(ಯ+೧)(೨ಯ+೧)}{(ಯ-೧)(೨ಯ-೧)}$. ೭. ೪೨.

ಪತ್ರಿಕೆ ಲನೆಯದು.

ಪು. ೨೩೦.

೧. ೧೩೨೦ ಚೌ. ವಾರು. ೨. -೬; ೨, ೧. ೩. ೨೪.೬೪ ಚೌ. ಫು.;
 $t = \sqrt{\frac{ಪ}{೪\pi}}$; ೩೨ ಇಂ. ೪. ೪(೨ಯ-೫)(೩ಯ+೧೧); (ಪ-೮ಬ)(ಪ+೮ಬ
-೭೮); (೪ಮ+ಮ+೯)(೪ಮ-ಮ+೯). ೫. ೨೮ಯ-೯೦ಯರ+೭೫ರ.
೬. $\frac{೧}{೨ಕ+೧}$. ೭. ೩೦೦೦ ರೂ.; ೭೦೦೦ ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧೦ನೆಯದು.

ಪು. ೨೩೧.

೧. ೫೦೦ ರೂ.; ೬೦೦ ರೂ. ೨. ೨; ೩, ೨. ೩. $ಪ್ಲ = ೨೮೦ + ೪೮೦$;
೪೬೪ ಚೌ. ಇಂ. ೪. (೭ಯ+೯ರ); (ಕ+೧)(೧-೫); ೭(೨ಯ-೩)
(೩ಯ+೨). ೫. ೩(ನ-೨); ೩೬ (೧೧ನ+೧೩)(ನ-೨)(ನ-೨೫).
೬. $\frac{೧}{ಪ+೮}$. ೭. ೭೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧೧ನೆಯದು.

ಪು. ೨೩೨.

೧. ೨೨, ೨೩, ೨೪. ೨. ೪; -೧, ೨. ೩. $ಎ = \frac{ಪ್ಲ-೨೮೦}{೪೮೦}$; ೭. ಇಂ.
೪. (೪ರ+೭ಸ)೩; (೪ಪ-೯ಮ)(೨ಪ+೩ಮ+೫); (೬ಕ-೫ಗ-೨)(೬ಕ
-೫ಗ+೧). ೫. ತ+೮ನ; ೧೫(೨ತ-ನ)(ತ-೮ನ)(ತ+೮ನ). ೬. $\frac{೧೬}{(ಯ-೪)೨}$.
೭. ೩೦೦ ರೂ.; ೬೦೦ ರೂ.; ೯೦೦ ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧೨ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೩೩.

೧. ೫೪೦. ೨. ೪; ೨, ೩. ೩. ಭ = $\frac{ಬ+೪}{೨}$; ೧೦. ೪. (ಸ+೨)(೩೩ಪ

-೨೦ಪ+೪); (೨ಯ-೧)(೨ಯ+೧)(ಯ-೨)(ಯ+೨); ೪(೩ನ+೧)(೬ನ-೫).

೫. ೨ಪ-೧; ೨ಪ(೨ಪ-೧)೩(೫೦ಪ+೨೩)(೪ಪ+೨ಪ+೧). ೬. ಪ-೨ಪ

-೧೫; ಪ-೨ಪ+೧೨. ೭. ೩೦೦ ರೂ.; ೩೪೦ ರೂ.; ೩೬೦ ರೂ.

